

Phytem 2ème année - Mb (Relativité)

Pierre Billoir

12 septembre 2003

Table des matières

1 Mécanique Newtonienne et Electromagnétisme : les conflits	5
1.1 La Relativité Galiléenne	5
1.2 Propagation de la lumière : Observations et expériences	6
1.2.1 Vitesse dans le vide	6
1.2.2 Ondes ou corpuscules?	6
1.2.3 Le problème du mouvement de l'éther	6
1.2.4 La crise finale et le dénouement	7
1.3 Les difficultés internes de l'électromagnétisme prérelativiste	8
2 Les transformations de l'espace-temps	10
2.1 Repérage dans un référentiel	10
2.2 Un exemple simple de transformation des durées et des distances	11
2.3 Invariances et transformations de Lorentz	12
2.3.1 Invariance de l'intervalle	12
2.3.2 Transformations "spéciales"	12
2.3.3 Représentation géométrique "hyperbolique"	13
2.3.4 Généralisation : groupes de Lorentz et de Poincaré	13
2.3.5 Genre, causalité et topologie des groupes de Lorentz/Poincaré	14
2.4 Réinterprétation des contractions et dilatations	15
2.4.1 Dilatation des temps	15
2.4.2 Contraction des longueurs	16
2.5 Un pseudo-paradoxe de la Relativité : les jumeaux de Langevin	16
2.6 Formalisme quadrivectoriel et conventions	17

2.6.1	Quadrivecteurs et produit scalaire	17
2.6.2	Les transformations de Lorentz	18
2.6.3	Usines à quadrivecteurs	18
3	La cinématique relativiste	20
3.1	Transformation des vitesses et accélérations	20
3.1.1	Notations	20
3.1.2	Cas unidimensionnel	20
3.1.3	Cas général	22
3.2	Application à la propagation d'ondes électromagnétiques	22
3.2.1	Interprétation de l'entraînement partiel de l'éther	22
3.2.2	Effet Doppler relativiste	23
3.2.3	Aberration angulaire relativiste	23
3.2.4	Utilisation des quadrivecteurs	24
4	La Dynamique Relativiste	26
4.1	La masse et le quadrivecteur énergie-impulsion	26
4.1.1	Définitions	26
4.1.2	Approximations faiblement relativiste et ultra-relativiste	27
4.1.3	Convention de notation " $c = 1$ "	28
4.2	Systèmes de particules, centre de masse et masse équivalente	28
4.3	Interactions entre particules	28
4.3.1	Lois de conservation	28
4.3.2	Interaction sur cible fixe et collisionneur	29
4.3.3	Réactions "à deux corps"	30
5	L'électromagnétisme relativiste	31
5.1	Le formalisme tensoriel (version minimale)	31
5.2	Le retour des équations de Maxwell	32
5.2.1	Le quadrivecteur densité de courant	32
5.2.2	Le quadripotential et les champs	32

5.2.3	La quadriforce électromagnétique	34
5.2.4	L'invariance de jauge	35
5.2.5	L'équation de D'Alembert et les potentiels retardés	35
5.3	Le rayonnement des charges en mouvement	36
5.3.1	Les potentiels de Liénard-Wiechert	36
5.3.2	Champ électromagnétique d'une charge en mouvement	37

Chapitre 1

Mécanique Newtonienne et Electromagnétisme : les conflits

Historiquement, c'est d'abord la théorie ondulatoire de la lumière (Fresnel, 1820) qui a posé un problème : l'onde lumineuse était censée avoir comme support un milieu (l'éther), qui définissait un référentiel particulier. Pour sauvegarder les observations optiques (locales ou astronomiques) Fresnel imagine un "entraînement partiel" de l'éther dans les milieux transparents.

La construction progressive de l'électromagnétisme, qui aboutit aux fameuses équations de Maxwell (1865), n'arrange pas les choses. Elle prédit, entre autres, la propagation d'ondes dans le vide avec une vitesse $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Si c est une vraie constante, ces équations ne peuvent donc être valables que dans un référentiel particulier.

La Relativité (Einstein, 1905) est le cadre qui permettra de rendre les équations de Maxwell invariantes par changement de référentiel, sans avoir à les modifier.

1.1 La Relativité Galiléenne

Quand on écrit la loi de Newton :

$$\vec{F} = m \vec{a} \tag{1.1}$$

l'accélération \vec{a} est invariante par changement de référentiel galiléen ; la masse est implicitement supposée, elle aussi, invariante. Donc si les forces sont elles-mêmes indépendantes du choix du référentiel (nous verrons des contre-exemples...), la loi de Newton est *invariante galiléenne*¹.

Le "si" dans la phrase qui précède pèse lourd : si la force gravitationnelle

$$\vec{F}_{12} = -\frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12} \tag{1.2}$$

est indépendante du référentiel, il faut supposer qu'elle a un caractère *instantané* (une vitesse finie pour la propagation d'une action ne serait pas la même pour tous les observateurs) : donc, tout déplacement d'une masse a un effet immédiat dans tout l'Univers ! Cette difficulté ne sera résolue qu'avec le Relativité Générale.

¹En général, dire qu'une loi physique est invariante ne veut pas dire que chacun des termes de l'équation est inchangé dans un changement de référentiel, mais seulement que la *relation* entre eux reste valable. Par exemple, la loi de Newton généralisée à un référentiel non galiléen (incluant les forces dites d'"inertie") est invariante, bien que l'accélération ne le soit plus.

1.2 Propagation de la lumière : Observations et expériences

1.2.1 Vitesse dans le vide

La première vraie mesure (Römer, 1675) repose sur une observation astronomique : la fréquence apparente des occultations des satellites de Jupiter dépend du rapport de la vitesse relative de la Terre par rapport à Jupiter sur la vitesse de la lumière, et varie donc au cours de l'année ; cette mesure (qui est une utilisation de l'effet Doppler avant la lettre !) était imprécise, car les distances astronomiques étaient mal connues. Bien plus tard, la méthode de la roue dentée tournant à grande vitesse sur le trajet d'un faisceau lumineux faisant un aller-retour sur une grande distance (Fizeau, 1842) donna la valeur connue actuellement (en fait, c'était la vitesse dans l'air, peu différente de c).

1.2.2 Ondes ou corpuscules ?

La théorie corpusculaire de Newton sous-entendait que la vitesse des grains de lumière était la composée de la vitesse de l'émetteur et de la vitesse d'éjection intrinsèque (toujours largement dominante pour les sources envisagées à l'époque). Par ailleurs, pour interpréter la réflexion et la réfraction, il fallait admettre que ces grains étaient affectés par la traversée d'une interface ; la force subie étant, par raison de symétrie, perpendiculaire à l'interface, un angle de réfraction inférieur à l'angle d'incidence impliquait une *accélération* : la lumière devait donc aller plus vite dans les milieux transparents que dans le vide. Par contre, pour une onde, la loi des sinus pour la réfraction implique une vitesse c/n , inférieure à celle dans le vide.

L'observation des interférences et de la diffraction vers 1800 a amené à considérer la lumière comme une *onde*, c'est à dire, suivant les conceptions de l'époque, comme la vibration d'un milieu, l'*éther*, qui devait avoir un énorme rapport rigidité/densité (pour expliquer une vitesse de propagation très grande) et baigner le vide, ainsi que tous les milieux transparents. La mesure de la vitesse de la lumière dans l'eau, par une méthode interférométrique (Foucault, 1850), est venue corroborer sa nature ondulatoire.

1.2.3 Le problème du mouvement de l'éther

Comme les lois de l'optique sont vérifiées précisément à toute heure et en toute saison, les mouvements de la Terre ne semblent pas avoir d'effet sur sa vitesse par rapport à l'éther. On peut imaginer que localement, l'éther "accompagne" la Terre, mais alors les observations astronomiques seraient distordues, ce qui est contraire, par exemple, aux observations sur l'aberration angulaire des étoiles (Bradley, 1728). Par ailleurs, l'hypothèse de l'éther introduit un référentiel privilégié : ce n'est pas, en soi, contradictoire avec les lois de Newton, mais c'est gênant pour l'universalité des lois physiques.

Pour résoudre le paradoxe de l'insensibilité des lois de l'optique aux mouvements de la Terre, Fresnel (1818) a imaginé un "entraînement partiel" de l'éther, avec un coefficient $1 - 1/n^2$ (plus l'indice est élevé, plus l'éther est entraîné), qui rétablirait le bon rapport entre les vitesses dans deux milieux d'indices différents.

L'expérience de Fizeau (1851), qui consistait à mesurer la vitesse de la lumière dans un écoulement d'eau (plus précisément la différence entre une propagation dans le sens du courant et en sens opposé, voir Fig.1.1), a donné un résultat compatible avec cette hypothèse.

D'une façon générale, on peut dire que par un artifice plus ou moins convaincant, on s'est débarrassé des effets du premier ordre en v/c .

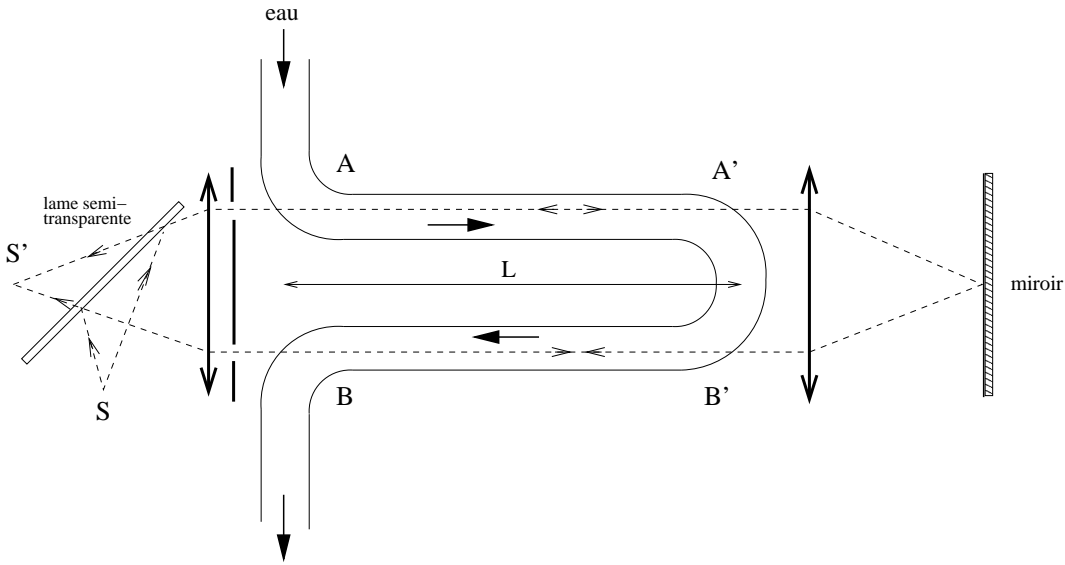


FIG. 1.1 – Le principe de l’expérience de Fizeau (vitesse de la lumière dans un courant d’eau de vitesse v) : si α est le coefficient d’entraînement de l’éther, le temps du parcours $AA' + B'B$ est $2L/(c/n + \alpha v)$, celui du parcours $BB' + A'A$ est $2L/(c/n - \alpha v)$; la différence $4L\alpha v/((c/n)^2 - \alpha^2 v^2)$ correspond, pour une longueur d’onde λ (et pour $v \ll c$) à un nombre de franges $4n^2 L/\lambda \cdot \alpha v/c$

1.2.4 La crise finale et le dénouement

Plus tard (à partir de 1881) Michelson (puis Michelson et Morley) ont essayé (en vain) de mettre en évidence un “vent d’éther” par une méthode interférométrique très précise, capable de détecter des effets en $(v/c)^2$, même pour v nettement inférieure à la vitesse orbitale de la Terre (voir Fig.1.2) ; cette absence était difficile à interpréter dans le modèle de l’entraînement partiel.

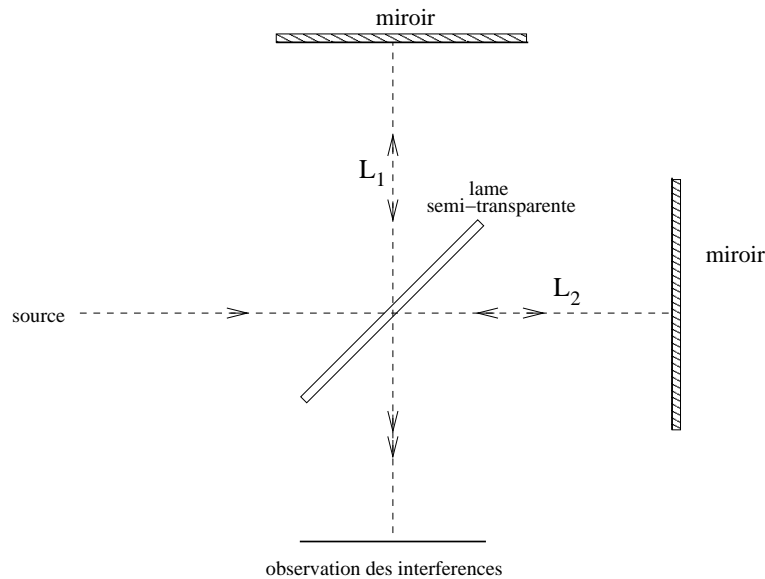


FIG. 1.2 – Le principe de l’expérience de Michelson et Morley : Si le vent d’éther (de vitesse v) est parallèle au bras 1, le parcours aller-retour sur ce bras dure $L_1/(c - v) + L_1/(c + v) = 2L_1 c/(c^2 - v^2)$; sur le bras 2, la vitesse de propagation est $\sqrt{c^2 - v^2}$ (sa composée avec une vitesse v perpendiculaire doit donner c dans le référentiel de l’éther), donc le temps est $2L_2/\sqrt{c^2 - v^2}$; une rotation de 90 degrés échange la position des deux bras, et la différence entre les décalages vaut $2(L_1 + L_2)/c (1/(1 - v^2/c^2) - 1/\sqrt{1 - v^2/c^2})$, c’est-à-dire, pour $v \ll c$, un nombre de franges égal à $(L_1 + L_2)/\lambda \cdot (v/c)^2$, ce qui permet une sensibilité sur β de l’ordre de 10^{-4}

Leurs résultats constamment négatifs ont amené à d'autres interprétations, notamment une "contraction des longueurs" en $1 - v^2/2c^2$ dans la direction du mouvement (FitzGerald 1889, Lorentz). Finalement, Lorentz (1904) et Poincaré (1905) en sont arrivés à écrire des lois de transformation sur les coordonnées et le temps, qui préservent l'invariance par changement de référentiel,... en les considérant comme des artifices liés à l'électromagnétisme; Einstein en a fait des formules de base, pour l'ensemble des lois physiques.

1.3 Les difficultés internes de l'électromagnétisme prérelativiste

L'électrostatique de Coulomb est calquée sur la gravitation (à part l'existence de charges de deux signes), et ne pose pas de problèmes nouveaux. La magnétostatique non plus, tant qu'on ne considère que des actions entre dipôles (aimants élémentaires).

Les choses se compliquent à partir du moment où on relie les effets magnétiques aux charges en mouvement. Par exemple, la force magnétique sur une charge s'écrit :

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (1.3)$$

Elle dépend de la vitesse, donc du choix du référentiel! Notons que le problème ne se pose pas pour la force "de Laplace" sur un *élément de courant*, qui ne change pas avec le référentiel, si le support est globalement neutre; la notion de force "de Lorentz" n'est apparue qu'après la découverte de corpuscules comme l'électron, à la fin du 19ème siècle.

Pis encore, si nous considérons le champ magnétique comme créé par une charge en mouvement, nous obtenons la force magnétique entre charges :

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} (\vec{v}_1 \times \vec{u}_{12}) \times \vec{v}_2 \quad (1.4)$$

qui n'obéit même plus à la loi de l'action et de la réaction! Remarquons cependant que, si v_1 et v_2 sont petits par rapport à c , cette force est très petite par rapport à la force électrique (de Coulomb) entre ces mêmes charges : c'est un effet du *second ordre* en v/c .

Un autre aspect du conflit vient des lois de l'induction : un champ magnétique \vec{B} variable induit une f.e.m. dans un circuit, donc une forme de champ électrique; mais un champ peut être statique dans un référentiel, et variable dans un autre, s'il n'est pas uniforme : le champ électrique peut donc dépendre du référentiel.

On voit apparaître ici l'idée qu'un changement de référentiel doit "mélanger" les champs électrique et magnétique. Cette idée apporte un début de réponse au paradoxe de la force magnétique : la dépendance en vitesse de $q \vec{v} \times \vec{B}$ pourra être compensée par un terme $q \vec{E}'$ dans un autre référentiel de vitesse relative \vec{v}_r , avec la relation

$$\vec{E}' = \vec{v}_r \times \vec{B} \quad (1.5)$$

Un autre exemple de ce mélange : un condensateur chargé engendre un champ électrique $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0 \vec{n}$ entre ses plaques; un observateur se déplaçant avec une vitesse \vec{v}_r , parallèlement aux plaques, y verra deux nappes de courant, de directions opposées, créant un champ magnétique $\vec{B}' = \mu_0 \sigma \vec{n} \times \vec{v}_r$, soit encore :

$$\vec{B}' = \frac{\vec{v}_r}{c^2} \times \vec{E} \quad (1.6)$$

On voit se dessiner une *dualité* entre les quantités \vec{E} et $c\vec{B}$ (de même dimensionalité), avec des effets d'ordre 1 en $\beta = v_r/c$.

La synthèse réalisée par les équations de Maxwell, non seulement englobe tous les phénomènes connus précédemment, mais permet d'en prédire de nouveaux, notamment les ondes électromagnétiques (en passant, on réinterprète les ondes lumineuses comme un cas particulier). Nous allons écrire ces équations sous une forme "homogénéisée" par des facteurs c judicieusement placés :

temps	↔	distance
densité de charge	↔	densité de courant
champ électrique	↔	champ magnétique

En posant $\kappa = 1/\varepsilon_0$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \kappa \rho \quad (1.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (c\vec{B}) = 0 \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \times c\vec{B} - \frac{\partial(\vec{E})}{\partial(ct)} = \kappa \vec{j}/c \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial(c\vec{B})}{\partial(ct)} = 0 \quad (1.10)$$

La dualité pourrait être parfaite avec des charges magnétiques ; celles-ci n'ont pas encore été observées, mais la théorie ne les exclut pas.

La non-invariance galiléenne de ces équations vient du fait que les deux dernières relient des dérivées par rapport au temps à des dérivées par rapport aux coordonnées d'espace ; une transformation de Galilée change les dérivées spatiales en une combinaison de dérivées spatiales et temporelles, mais les dérivées temporelles restent "pures". En combinant ces équations dans le vide, on obtient l'équation de propagation (de D'Alembert) manifestement incompatible avec l'invariance galiléenne si ε_0 et μ_0 (donc aussi c) sont de vraies constantes universelles.

Le grand succès de la Relativité a été de résoudre toutes les incohérences en même temps.

Chapitre 2

Les transformations de l'espace-temps

Deux ingrédients sont à la base de la Relativité, l'un positif, l'autre négatif (un verrou intellectuel à supprimer) :

- Les lois de l'électromagnétisme, comme celles de la mécanique, doivent être les mêmes dans tous les référentiels galiléens. En particulier la vitesse c de la lumière dans le vide est une constante universelle.
- Le temps n'est plus absolu ; la chronologie des évènements dépend du référentiel de l'observateur.

Le premier point est fortement suggéré par les faits expérimentaux. Le second est contraire au sens commun, mais le caractère absolu du temps n'a été expérimenté qu'avec des vitesses relatives très faibles par rapport à c . Dans ce cas, il est avéré que deux horloges fonctionnant parfaitement, synchronisées une fois (ce qui suppose qu'elles coïncident dans l'espace), le restent lors de toute rencontre ultérieure, quels que soient leurs mouvements relatifs intermédiaires ; mais rien ne prouve que ceci reste valable pour de grandes vitesses relatives. D'autres concepts (comme celui de solide indéformable) peuvent être remis en cause sans contredire l'expérience courante aux "faibles" vitesses.

L'évidence subjective suggère que le temps et l'espace ne sont pas équivalents : on ne fait pas demi-tour dans le temps comme une rue ; nous verrons que ceci reste vrai en Relativité.

2.1 Repérage dans un référentiel

La Relativité garde la notion de référentiel galiléen, et aussi la notion d'*homogénéité* et d'*isotropie* de l'espace ; on admet, conformément aux expériences à faible vitesse, que deux observateurs sans mouvement relatif ont la même échelle de temps (à une constante additive près), et le même repère pour l'espace (à une translation et/ou une rotation près) ; en particulier, l'*intervalle de temps* et la *distance* entre deux évènements est la même pour les deux ; il en est donc de même pour toute vitesse (en norme).

Toutefois, pour pouvoir réaliser des expériences permettant de tester la théorie, il faut préciser une *méthode opérationnelle* pour établir un repérage de l'espace et du temps. Dans un premier temps, à partir d'un étalon de longueur, on peut imaginer qu'on remplit l'espace d'un "treillis" d'axes orthogonaux entre eux, gradués ; on y installe des horloges indéréglables, qu'on synchronise par l'échange de signaux électromagnétiques¹. Le système GPS est un exemple de réalisation concrète d'un tel repérage, à ceci près qu'il n'est pas rigide et doit être constamment remis à jour, et tenir compte des fluctuations de

¹En principe, il faut un donc temps infini pour construire un repère pour l'espace entier dans un référentiel donné ; en pratique, nous supposons que tous ceux qui seront "visités" ont été, en quelque sorte, pré-équipés dans tout le domaine exploré.

la propagation (l'atmosphère n'est pas vide)... et aussi d'effets gravitationnels décrits par la Relativité Générale.

2.2 Un exemple simple de transformation des durées et des distances

L'expérience de Michelson suggère un calcul simple du temps d'aller-retour d'un rayon lumineux qui se réfléchit sur un miroir, avec une vitesse c dans tout référentiel. Considérons d'abord un mouvement relatif *transversal* (parallèlement au miroir), selon la figure 2.1.

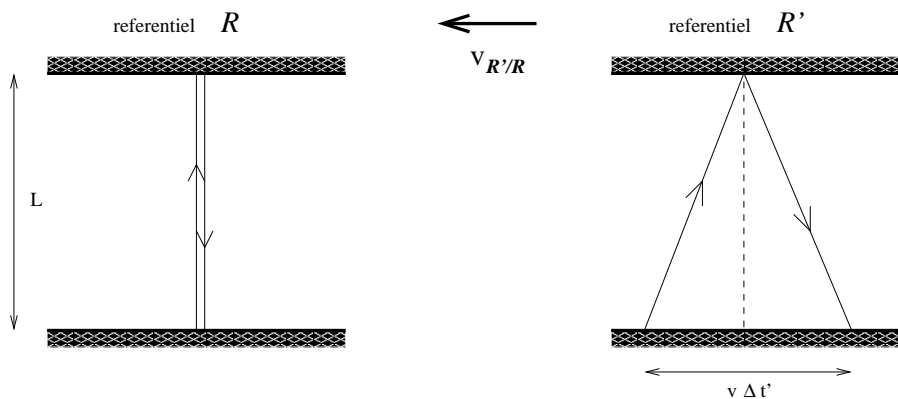


FIG. 2.1 – Transformation des temps dans une translation

Dans \mathcal{R} , on trouve un temps $\Delta t = 2L/c$ entre les deux événements “départ” et “retour”, qui ont lieu au même endroit; dans \mathcal{R}' , le déplacement latéral est de $v\Delta t'$, la distance parcourue est donc $2\sqrt{L^2 + (v\Delta t'/2)^2}$, qui doit être égale à $c\Delta t'$: on obtient ainsi la transformation :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.1}$$

Si nous appelons “temps propre” le temps écoulé entre deux événements pour un observateur qui les voit *au même lieu*, on voit que le temps mesuré par un autre observateur est plus long. C'est le phénomène appelé *dilatation des durées* (à ne pas isoler de son contexte!).

Envisageons maintenant un mouvement relatif *longitudinal* (perpendiculairement au miroir), selon la fig. 2.2.

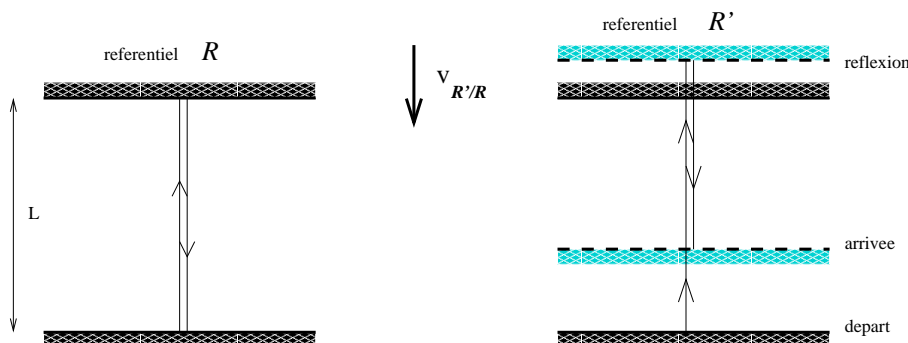


FIG. 2.2 – Transformation des longueurs dans une translation

Dans \mathcal{R} , on a toujours $\Delta t = 2L/c$. Par contre, dans \mathcal{R}' , les trajets aller et retour n'aurons pas la même durée; soit L' la distance (dans \mathcal{R}'), du point O au miroir (qui se déplacent tous deux à la vitesse v): le temps pour l'aller sera $\Delta t'_A = L/(c-v)$ et pour le retour $\Delta t'_R = L/(c+v)$, donc pour l'aller-retour $\Delta t' = 2L'c/(c^2 - v^2)$. Si la formule de dilatation des durées s'applique pour passer de Δt à $\Delta t'$, on trouve :

$$L' = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.2)$$

La “longueur propre” d'un objet étant par définition celle mesurée dans son propre référentiel (celui où il est immobile), la longueur mesurée dans un autre sera plus courte : c'est la *contraction des longueurs* (ici encore, ne pas faire d'usage abusif!)

2.3 Invariances et transformations de Lorentz

2.3.1 Invariance de l'intervalle

Formalisons maintenant, de façon plus générale, le changement de coordonnées d'un référentiel $\mathcal{R}(Oxyzt)$ à un autre $\mathcal{R}'(O'x'y'z't')$. On note $\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ la vitesse relative (uniforme et constante) de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} . Pour des raisons d'homogénéité, la transformation des coordonnées doit être *linéaire*. Si un rayon lumineux part de (x, y, z) à l'instant t , et arrive en $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ à l'instant $t + \Delta t$ (dans \mathcal{R}), avec les coordonnées correspondantes dans \mathcal{R}' , on a, d'après l'invariance de c :

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = (c\Delta t')^2 - (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) = 0 \quad (2.3)$$

Autrement dit, la forme quadratique $\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$ (*l'intervalle*) s'annule simultanément dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' , sur une hypersurface appelée *cône de lumière*; mathématiquement, ceci implique que les deux expressions sont proportionnelles. Le coefficient de proportionnalité dépend *a priori* du mouvement relatif des deux référentiels; si on admet la *réciprocité* entre \mathcal{R} et \mathcal{R}' , il vaut 1 ou -1 . Pour des vitesses faibles, on doit retrouver le résultat classique $\Delta t = \Delta t'$ avec des écarts dans l'espace petits devant $c\Delta t$, ce qui exclut la valeur -1 . Nous arrivons ainsi à la propriété fondamentale de l'espace-temps relativiste (espace *de Minkowski*) :

La transformation des coordonnées entre deux référentiels galiléens est *linéaire*, et **l'intervalle est invariant**.

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = (c\Delta t')^2 - (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) \quad (2.4)$$

2.3.2 Transformations “spéciales”

En pratique, on n'utilise guère que des transformations de Lorentz dites *spéciales* ou *pures*, dans lesquelles les axes d'espace sont parallèles entre \mathcal{R} et \mathcal{R}' (ils se déduisent les uns des autres par un pur mouvement de translation). Pour simplifier encore, nous pouvons choisir un axe dans \mathcal{R} (disons Ox) comme étant la trajectoire de O' , et prendre comme origine des temps l'instant où O' passe en O . Par définition, O' a donc dans \mathcal{R} les coordonnées $(vt, 0, 0)$. Avec l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie, l'axe Ox' coïncide avec Ox (au glissement près), et les droites qui coïncident avec Ox et Oy à $t = 0$, et qui glissent parallèlement à Ox avec la vitesse v , seront vus dans \mathcal{R}' comme des axes orthogonaux à Ox' et entre eux, immobiles : nous les prendrons donc comme axes $O'y'$ et $O'z'$. Nous aurons alors une *transformation spéciale* suivant l'axe Ox , pour laquelle $y' = y$ et $z' = z$. Écrivons la transformation sur t et x sous la forme suivante (avec des coefficients sans dimension) :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

L'identification de $(ct)^2 - x^2$ et de $(ct')^2 - x'^2$ nous donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A^2 - C^2 &= 1 \\ D^2 - B^2 &= 1 \\ AB + CD &= 0 \end{aligned}$$

La première relation nous dit qu'il existe un réel ψ_1 tel que $A = \cosh(\psi_1)$, $C = \sinh(\psi_1)$, la deuxième qu'il existe ψ_2 tel que $D = \cosh(\psi_2)$, $B = \sinh(\psi_2)$; la troisième donne alors $\sinh(\psi_2 - \psi_1) = 0$, et donc $\psi_2 = \psi_1$. Par ailleurs nous savons que le point d'équation horaire $x = vt$ dans \mathcal{R} devient $(0,0)$ dans \mathcal{R}' , ce qui nous donne $B/A = D/C = -v/c$; nous pouvons donc écrire que $\psi_2 = \psi_1 = -\psi$ avec $\psi = \tanh^{-1}(v/c)$.

Finalement la transformation de Lorentz spéciale de vitesse v suivant Ox s'écrit, en coordonnées homogénéisées :

$$\left. \begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) = \cosh(\psi) ct - \sinh(\psi) x \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) = \cosh(\psi) x - \sinh(\psi) ct \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

avec

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh(\psi) \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \cosh(\psi) \quad (2.7)$$

La quantité ψ (sans dimension) est appelée *rapidité* en Physique des Hautes Energies; nous utiliserons cette dénomination dans la suite.

On vérifie que la transformation inverse s'obtient en changeant v en $-v$ (ou β en $-\beta$, ou ψ en $-\psi$), ce qui correspond bien à la notion intuitive de réciprocité entre \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

Naturellement, on doit retrouver la Mécanique Classique à la limite des faibles vitesses. Plus précisément, si on se limite, pour une échelle de temps T , à des coordonnées d'espace *petites par rapport à cT* (c 'est à dire à un domaine "explorable" avec des vitesses *petites par rapport à c*), les formules 2.6 redonnent, au premier ordre en β , les transformations dites "de Galilée" :

$$\left. \begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

2.3.3 Représentation géométrique "hyperbolique"

Si on se limite à une dimension d'espace, on peut voir une analogie entre les deux premières équations de 2.6 et les formules de changement de coordonnées par rotation dans un plan euclidien :

$$\begin{aligned} x' &= \cos(\phi) x - \sin(\phi) y \\ y' &= \cos(\phi) y + \sin(\phi) x \end{aligned} \quad (2.9)$$

Le cône de lumière (qui n'a évidemment pas d'équivalent en géométrie euclidienne) est constitué par les asymptotes des hyperboles "unitaires" qui définissent les unités de temps et d'espace dans les différents référentiels. Un changement de référentiel apparaît comme un *cisaillement* du plan (ct, x) (contraction d'un facteur $\exp(\psi)$ dans une des directions de lumière, dilatation du même facteur dans l'autre); notons en passant que cette transformation conserve les aires dans le plan (t, x) (déterminant égal à un).

2.3.4 Généralisation : groupes de Lorentz et de Poincaré

On peut évidemment combiner les transformations spéciales de Lorentz avec n'importe quelle isométrie dans l'espace (x, y, z) (rotation ou renversement d'espace), et éventuellement un renversement du temps ;

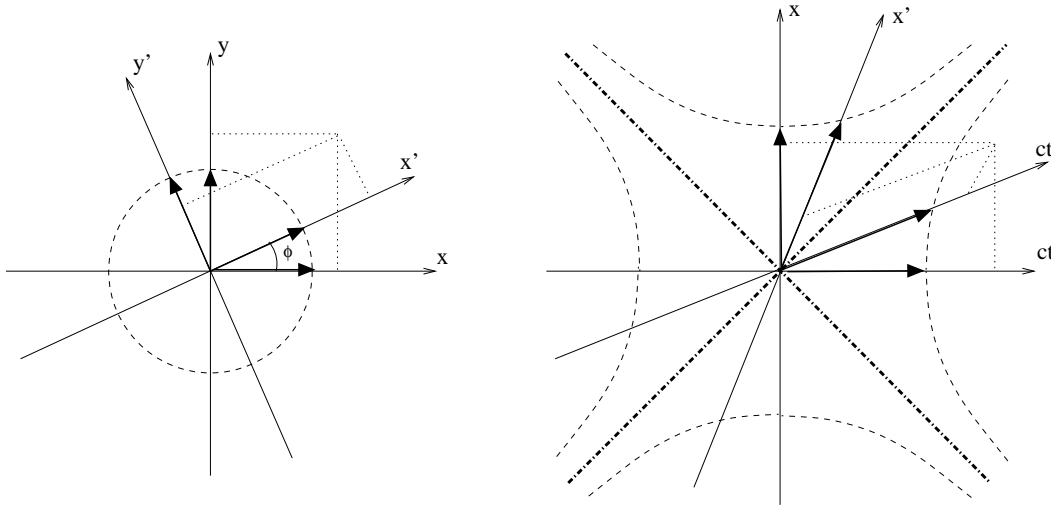


FIG. 2.3 – Rotation euclidienne (à gauche) et transformation spéciale de Lorentz (à droite)

ces transformations pouvant être appliquées avant ou après, ou une avant et une autre après. On obtient ainsi un ensemble de transformations qu'on appelle le *groupe de Lorentz*. Mathématiquement, on montre que toute transformation linéaire des coordonnées qui conserve l'*intervalle* $(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ est la composition d'une transformation de Lorentz spéciale avec des isométries spatiales (et éventuellement d'un renversement du temps) ; elle peut donc se ramener à un produit $R_1 L_x R_2$ (R_1 et R_2 étant deux isométries, L_x une transformation du type 2.6). Autrement dit, par des changements d'axes dans les repères initial et/ou final, toute transformation qui conserve l'*intervalle* peut se ramener à une transformation spéciale suivant Ox (avec éventuellement un renversement d'espace et/ou de temps).

Le déterminant d'une transformation spéciale, ou d'une rotation d'espace, vaut 1 ; celui d'une transformation de Lorentz quelconque vaut 1 ou -1 (par exemple, pour un renversement de temps ou d'espace).

Il y a des particularités plus ou moins déroutantes des transformations de Lorentz par rapport à celles de Galilée : par exemple, si on compose deux transformations, le résultat dépend en général de l'ordre, comme pour les rotations d'espace ; le produit de deux transformations spéciales *non colinéaires* n'est pas commutatif, et d'ailleurs ce n'est plus une transformation *spéciale* (elle comporte une rotation des axes d'espace).

Si on ajoute au groupe de Lorentz les translations (d'espace et de temps), on obtient le *groupe de Poincaré*, qu'on peut définir aussi comme l'ensemble des transformations *affines* dans un espace de dimension 4, qui conservent l'intervalle.

2.3.5 Genre, causalité et topologie des groupes de Lorentz/Poincaré

L'intervalle entre deux événements $E_1(t_1, \vec{r}_1)$ et $E_2(t_2, \vec{r}_2)$ (points dans l'espace-temps) peut, par construction, prendre une valeur positive, négative ou nulle ; on parlera, respectivement, d'un intervalle de *genre temps, lumière ou espace* (le genre est invariant, donc le même pour tout observateur).

- Si (E_1, E_2) est du genre *temps*, il existe un référentiel, de vitesse $\vec{V} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/(t_2 - t_1)$ (avec $\|\vec{V}\| < c$), pour lequel E_1 et E_2 ont la même position ; ils ne sont simultanés pour aucun observateur.
- Si (E_1, E_2) est du genre *espace*, E_1 et E_2 sont simultanés dans certains référentiels (ceux de vitesse \vec{V} telle que $\vec{V} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = c(t_2 - t_1)$) ; ils ne sont jamais à la même position.
- Si (E_1, E_2) est du genre *lumière*, ils peuvent être reliés par la propagation d'un rayon lumineux dans le vide (ou tout autre signal de vitesse c).

Si on essaie de paramétrer de façon continue le groupe de Lorentz (ou le groupe de Poincaré), on s'aperçoit qu'on ne peut le parcourir en entier : on dit qu'il n'est pas *connexe*. Il est clair par exemple

que le déterminant, qui vaut 1 ou -1, ne peut changer de signe par continuité; ceci interdit entre autres un pur renversement du temps (avec les mêmes axes d'espace, sans mouvement relatif), ou un pur retournement d'espace, par un changement de référentiel continu. On peut aller plus loin : en termes imagés, un observateur, qui ne peut changer que continûment de référentiel, ne peut franchir le cône de lumière (sa vitesse par rapport au référentiel ne peut dépasser, ni même atteindre c) : ceci implique que si l'intervalle (E_1, E_2) est du genre temps, l'ordre temporel des deux événements ne peut être renversé. A partir d'une origine, on peut donc définir, dans la partie "temporelle" du cône de lumière, le demi-cône du *futur absolu*, et celui du *passé absolu*; l'extérieur du cône de lumière (partie "spatiale"), peut être appelé l'*ailleurs absolu*.

Ceci permet de conserver une notion de *causalité* : un événement peut influencer son cône du futur, et être influencé par son cône du passé; il n'y a pas de lien causal avec l'"ailleurs". Naturellement on pourrait envisager des objets ayant une vitesse supérieure à c pour tous les observateurs (les "tachyons"); aucune observation ne suggère leur existence.

Le renversement du temps, comme celui de l'espace, sont des opérations purement abstraites; un renversement simultané de l'espace et du temps, bien que de déterminant 1, est lui aussi inaccessible à un observateur. Toutefois l'invariance ou non des lois physiques sous ces transformations a une grande importance théorique, et des conséquences indirectes observables en Physique des Particules.

2.4 Réinterprétation des contractions et dilatations

2.4.1 Dilatation des temps

Considérons deux événements séparés par un *temps propre* t_0 ("propre" veut dire : mesuré dans un référentiel où ils ont lieu au même endroit). En choisissant l'origine au premier événement, le second a pour coordonnées $(t_0, 0)$; pour un autre observateur, de vitesse \vec{v} par rapport à ce référentiel propre, les coordonnées seront $(\gamma t_0, -\beta \gamma c t_0)$, donc il trouvera entre les deux l'intervalle de temps "dilaté" obtenu en 2.1 :

$$t' = \gamma t_0 = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = t_0 \cosh(\psi) \quad (2.10)$$

Il est faux d'exprimer ceci par la phrase : "pour un observateur en mouvement, le temps passe moins vite que pour un observateur immobile" (qui réintroduirait sournoisement la notion de mouvement absolu); le statut des deux observateurs **n'est pas le même** pour le couple d'événements en question).

Cet effet a été observé expérimentalement, d'abord sur la désintégration des muons produits dans la haute atmosphère par les rayons cosmiques (désintégration de pions issus des interactions de ces rayons sur le noyau) : le fait que beaucoup d'entre eux arrivent jusqu'au sol après un parcours de l'ordre de 5 à 15 km est apparemment contradictoire avec leur temps de vie à l'arrêt (2 microsecondes) mesuré en laboratoire; il s'explique bien comptenu du fait que ces muons sont produits avec une vitesse proche de c , donc un facteur de Lorentz γ élevé. Plus récemment, des vérifications directes ont été faites avec des horloges atomiques au sol ou embarquées sur des avions faisant le tour de la Terre dans un sens ou dans l'autre (expérience de Hafele et Keating, 1971). On peut dire que le fonctionnement correct d'un système de positionnement par satellites comme le GPS (qui, évidemment, inclut les corrections de temps relativistes) est une vérification de la Relativité dans la vie de tous les jours².

²C'est même devenu une vérification banale de la Relativité Générale, car les satellites à haute altitude sont dans un potentiel gravitationnel différent de celui des horloges de surface : si on ne faisait pas les corrections de R.G., les erreurs dépasseraient très vite la précision intrinsèque des horloges

2.4.2 Contraction des longueurs

De façon symétrique, considérons maintenant un objet se réduisant à un segment de *longueur propre* L_0 (mesurée dans le référentiel où il est immobile). L'une des extrémités étant à l'origine, l'autre sera à l'abscisse fixe L_0 : ceci se traduit par des "équations horaires" $x_1 = 0$, $x_2 = L_0$, pour tout t . Pour un autre observateur, se déplaçant longitudinalement à la vitesse v , les extrémités auront donc des coordonnées qui vérifieront toujours :

$$\begin{aligned}\gamma(x'_1 + \beta ct'_1) &= 0 \\ \gamma(x'_2 + \beta ct'_2) &= L_0\end{aligned}$$

Si on se place à un même temps pour les deux extrémités dans le deuxième référentiel, on obtient en soustrayant les deux équations :

$$\gamma \Delta x' = L_0 \quad \rightarrow \quad L' = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} = L_0 / \cosh(\psi) \quad (2.11)$$

qui n'est autre que la contraction des longueurs (2.2).

Insistons encore sur le fait que les deux observateurs ne sont **pas dans la même situation** rapport à l'objet mesuré. Cette "contraction" n'est pas un effet physique intrinsèque comme dans l'hypothèse de FitzGerald-Lorentz, mais un effet de "point de vue". Remarquons aussi que la "longueur" d'un objet est *définie* par les positions instantanées dans le référentiel de l'observateur ; ce n'est pas la longueur qu'on verrait sur une *photographie* instantanée de l'objet en face d'une règle graduée, car les temps de propagation de la lumière ne sont pas les mêmes pour tous les points.

2.5 Un pseudo-paradoxe de la Relativité : les jumeaux de Lan-gevin

Imaginons deux jumeaux (du même âge, donc), qui sont au départ (événement origine O) immobiles ensemble dans un référentiel \mathcal{R} . Le premier y reste, tandis que l'autre fait un trajet aller-retour, d'abord dans le référentiel \mathcal{R}' , de vitesse \vec{v} par rapport à \mathcal{R} , puis dans \mathcal{R}'' , de vitesse $-\vec{v}$; nous poserons bien sûr $\beta = v/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Sur la Fig. 2.4, la trajectoire d'espace-temps de (1) est le segment OF , celle de (2) est la ligne OAF . La question est alors : quand ils se retrouvent (événement F), ont-ils encore le même âge ? (on suppose, bien sûr, que chacun vieillit suivant son temps propre).

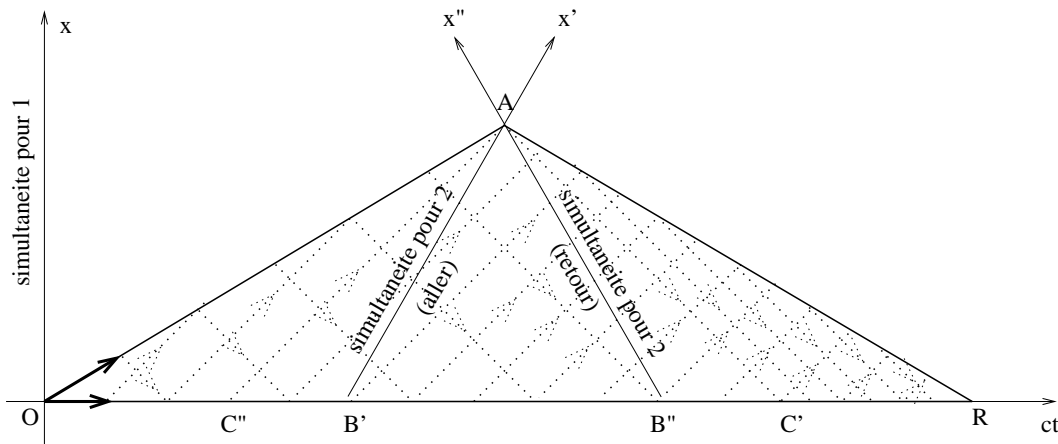


FIG. 2.4 – Le paradoxe des jumeaux décortiqué

Le calcul est simple : dans \mathcal{R} , les coordonnées de A sont $(cT, \beta T)$, celles de F sont $(2T, 0)$. Chacun des segments OA et AF correspond à une durée T dans \mathcal{R} ; par contre OA dure $\sqrt{T^2 - (\beta T)^2}$ dans \mathcal{R}' ,

et AF la même chose dans \mathcal{R}'' : au total (2) aura passé un temps plus court que (1), et arrivera plus jeune que lui ! C'est un cas particulier de la dilatation des durées déjà étudiée.

Bien que l'expérience avec des êtres vivants ne puisse encore être menée de façon à donner des différences visibles, les mesures sur des horloges atomiques ont clairement donné raison à ce calcul. A l'époque où Einstein, Langevin et d'autres essayaient de faire "passer le message", ce paradoxe apparaissait comme très choquant ; il le reste encore, au second degré en quelque sorte, quand on utilise des formulations approximatives. En particulier, on pourrait dire : puisqu'il n'y a pas de mouvement absolu, on ne peut pas dire que l'un reste "immobile" pendant que l'autre voyage ; pourquoi donc cette asymétrie à la fin ? chacun devrait percevoir l'autre comme vieillissant moins vite que lui, tout au long de l'expérience.

Il est vrai que (2) subit un violent épisode en A , quand il fait demi-tour ; qu'arrive-t-il à son "horloge propre" lors de cette phase accélérée ? On peut répondre à cela que, s'il subit un décalage, cet effet ne doit dépendre que de v , pas de la longueur du voyage : à la limite où T devient grand, v restant fixé, on doit retrouver le résultat de Langevin.

Il est clair que l'histoire des jumeaux est *objectivement* asymétrique, mais il est utile de se persuader qu'il n'y a aucune contradiction interne dans la notion de mouvement relatif. Sur la Fig. 2.4, on voit que, si (2) considère (1) dans son propre référentiel, il se passe quelque chose de "catastrophique" : pendant le trajet aller, (1) "vieillit" de O à B' , **moins que lui** (comme il se doit !), de même que pendant le trajet retour, de B'' à F ; mais pendant son demi-tour, il "voit" (1) passer brutalement de B' à B'' , ce qui fait plus que compenser l'effet précédent !

Le mot "voit" est inapproprié dans ce contexte, on devrait plutôt dire "repère", et ce repérage *ne peut être instantané*, comme nous l'avons signalé au départ. Il est intéressant de décrire ce qui se passe si (1) et (2) se *voient* au sens propre (ou s'envoient régulièrement des messages à la vitesse c , représentés par des pointillés sur la Fig. 2.4). Chacun reçoit les messages de l'autre à une fréquence *diminuée* pendant le voyage aller (facteur $\gamma(1 - \beta) = \sqrt{(1 - \beta)/(1 + \beta)}$), et *augmentée* pendant le retour (facteur $\sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$), conformément à l'effet Doppler relativiste (voir plus loin). La différence entre les deux vient de ce que, pour (2), la première phase (OA) et la seconde (AF) ont la même durée, tandis que pour (1) la première phase (OC') est plus longue que la seconde ($C'F$) ; il n'a pas de phase "catastrophique" et le vieillissement apparent de chaque jumeau pour l'autre est continu.

2.6 Formalisme quadrivectoriel et conventions

2.6.1 Quadrivecteurs et produit scalaire

Il est naturel de décrire l'espace-temps comme un espace vectoriel réel de dimension 4, avec des *quadrivecteurs* (ou 4-vecteurs) notés \tilde{x} , de coordonnées (ct, x, y, z) dans une base (repère d'espace-temps) donnée. Par convention, nous noterons (x^0, x^1, x^2, x^3) les coordonnées³, et nous écrirons :

$$\tilde{x} = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \tilde{e}_\mu \quad (2.12)$$

Plus généralement, nous appellerons *quadrivecteur* tout objet à 4 composantes se transformant par les formules de Lorentz dans un changement de référentiel. Les x^μ sont appelées coordonnées *contravariantes*, et on définit les coordonnées *covariantes* x_μ par :

$$x_0 = x^0 \quad ; \quad x_i = -x^i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.13)$$

Ces définitions (qui se réfèrent à un cadre mathématique plus vaste que nous ignorerons ici), permettent

³une autre convention courante est (x^1, x^2, x^3, x^4) pour (x, y, z, ct)

d'introduire le *quadri-produit scalaire* de deux quadrivecteurs :

$$\tilde{x} \cdot \tilde{y} = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu y_\mu = x^\mu y_\mu \quad (2.14)$$

la deuxième expression utilisant la *convention de sommation implicite* (dite “convention d'Einstein”) : quand un même indice est répété en haut et en bas, on effectue une sommation de 0 à 3 ; on convient aussi de noter par une lettre grecque cet indice, et par une lettre latine un indice “d'espace” qui ira de 1 à 3.

En notant $\tilde{x} = (x^0, \vec{x})$ on a une forme équivalente :

$$\tilde{x} \cdot \tilde{y} = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (2.15)$$

La propriété fondamentale du 4-produit scalaire (outre son caractère bilinéaire symétrique) est :

Le 4-produit scalaire de deux 4-vecteurs est un **invariant**

En effet, on sait que pour tout \tilde{x} , l'intervalle associé $\tilde{x} \cdot \tilde{x}$ est invariant. Par ailleurs, les transformations de Lorentz étant linéaires, la somme de deux 4-vecteurs est un 4-vecteur ; pour tout couple (\tilde{x}, \tilde{y}) , on peut donc écrire :

$$2\tilde{x} \cdot \tilde{y} = (\tilde{x} + \tilde{y}) \cdot (\tilde{x} + \tilde{y}) - \tilde{x} \cdot \tilde{x} - \tilde{y} \cdot \tilde{y} \quad (2.16)$$

Par analogie avec les espaces vectoriels euclidiens, un invariant est encore appelé *scalaire*.

2.6.2 Les transformations de Lorentz

Nous pouvons noter formellement une transformation linéaire (associée à une matrice (4×4)), en combinant la convention d'Einstein à la notation matricielle :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (2.17)$$

Nous pouvons généraliser la manipulation des indices en convenant qu'abaisser ou élever un indice change le signe si c'est 1, 2 ou 3, et ne change rien sinon ; ceci est compatible avec les sommations implicites ; par exemple :

$$x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \quad (2.18)$$

Une transformation de Lorentz sera caractérisée par la conservation de $x^\mu x_\mu$ pour tout quadrivecteur, soit $\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Lambda_\mu{}^\rho x_\rho \equiv x^\mu x_\mu$. Ceci donne :

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\rho = \delta_\nu^\rho \quad (2.19)$$

où $\delta_{\nu\rho}$ est le symbole de Kronecker usuel (1 si $\nu = \rho$, 0 sinon). Ceci est en fait un système d'équations que doivent vérifier les éléments de la matrice Λ pour qu'elle représente une transformation de Lorentz.

Une interprétation intéressante est la suivante : puisque les δ_ν^ρ sont les éléments de la matrice unité, on voit que la matrice Λ est inversible ; son inverse est⁴

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu \quad (2.20)$$

2.6.3 Usines à quadrivecteurs

Nous avons déjà mentionné que la somme de deux 4-vecteurs est un 4-vecteur ; il est clair aussi que si λ est un invariant et \tilde{x} un 4-vecteur, alors $\lambda\tilde{x}$ est un 4-vecteur.

⁴noter l'analogie avec les rotations d'espace, pour lesquelles la matrice inverse s'obtient par transposition

Un exemple qui sera exploité plus tard : si $d\vec{x}$ est un élément de trajectoire d'espace-temps (avec $\|d\vec{x}\| < c dt$) et $ds = \sqrt{d\vec{x}.d\vec{x}}$ l'élément de temps propre correspondant, alors $d\vec{x}/ds = (\gamma, \gamma\vec{\beta})$ est un 4-vecteur ; le 4-vecteur $\tilde{u} = c d\vec{x}/ds = (\gamma c, \gamma\vec{v})$ est appelé la *quadrivitesse*. Remarquons qu'on a toujours, par construction

$$\tilde{u}.\tilde{u} = c^2$$

Un outil puissant est fourni par la propriété suivante : si \tilde{x} est un 4-vecteur et y un objet à 4 composantes tel que $x^\mu.y_\mu$ soit invariant, alors y est un 4-vecteur. En effet :

$$x'^\mu y'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu y'_\mu \equiv x^\nu y_\nu \longrightarrow y_\nu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu y'_\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu y'_\mu$$

Par exemple, si $f(t, x, y, z)$ est une fonction différentiable *scalaire* (sa valeur pour un évènement ne dépend pas de l'observateur), on peut définir son *quadi-gradient* en remarquant que sa variation élémentaire est un invariant :

$$df = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

On *définira* donc le 4-gradient $\tilde{\nabla} f$ en posant :

$$(\tilde{\nabla})_\mu = \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.21)$$

(noter le jeu sur la place des indices).
Ceci veut dire en d'autres termes que :

$$\tilde{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial(ct)}, -\vec{\nabla} f \right) \quad (2.22)$$

où $\vec{\nabla} f$ est le gradient "ordinaire" (spatial) de f .

De la même façon, si $\tilde{A}(\tilde{x})$ est un champ de 4-vecteurs, on peut définir sa 4-divergence par :

$$\tilde{\nabla}.\tilde{A} = \partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^0}{\partial(ct)} + \vec{\nabla}.\vec{A} \quad (2.23)$$

Enfin, construisons l'analogie du Laplacien d'une fonction scalaire :

$$\square f = \tilde{\nabla}.\tilde{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial(ct)^2} - \Delta f \quad (2.24)$$

C'est le D'Alembertien, utilisé pour écrire les équations d'onde⁵.

⁵Note historique : D'Alembert a vécu au XVIIIème siècle, avant Laplace et bien avant la Relativité...

Chapitre 3

La cinématique relativiste

Une fois les formules de transformation des coordonnées écrites, il n'est pas difficile d'en déduire les transformations des vitesses, accélérations et de quantités qui leur sont reliées (bien que parfois les formules soient lourdes !). Une règle générale est qu'on retrouve la cinématique classique au premier ordre en β , y compris la propagation des ondes avec entraînement partiel de l'éther. Par contre les résultats sont très différents pour des vitesses de l'ordre de c .

3.1 Transformation des vitesses et accélérations

3.1.1 Notations

Soit M un point matériel, $d\vec{x}$ un élément de sa trajectoire, \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux référentiels galiléens, dans lesquels l'élément de temps sera noté respectivement dt pour $dt_{M/\mathcal{R}}$ et dt' pour $dt_{M/\mathcal{R}'}$. On notera de même les vitesses $\vec{v} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = d\vec{x}/dt$, $\vec{\beta} = \vec{v}/c$, et $\vec{v}' = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = d\vec{x}'/dt'$, $\vec{\beta}' = \vec{v}'/c$. La vitesse relative $\vec{v}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$ sera notée \vec{v}_r , et $\vec{\beta}_r = \vec{v}_r/c$. Les facteurs de Lorentz correspondants seront notés γ , avec le même symbole. si on introduit l'élément de temps propre $ds = \sqrt{d\vec{x} \cdot d\vec{x}}$, on aura donc :

$$dt = \gamma ds \quad ; \quad dt' = \gamma' ds$$

3.1.2 Cas unidimensionnel

Vitesse

Le mouvement d'un point matériel M sur un axe est défini par l'équation horaire $x(t)$ dans \mathcal{R} , et $x'(t')$ dans \mathcal{R}' avec des variations élémentaires qui suivent la transformation 2.6, donc :

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma_r(dx - \beta_r c dt)}{\gamma_r(ct - \beta_r dx)} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta_r c}{c - \beta_r \frac{dx}{dt}}$$

c'est à dire :

$$v' = \frac{v - \beta_r c}{c - \beta_r v} = \frac{v - v_r}{1 - \frac{v_r v}{c^2}} \quad (3.1)$$

ou encore :

$$\beta' = \frac{\beta - \beta_r}{1 - \beta_r \beta} \quad (3.2)$$

A partir de cette deuxième forme, ou bien des formules 2.6 exprimées avec la rapidité, on obtient facilement, en notant ψ_r la “rapidité relative” de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} :

$$\tanh(\psi') = \frac{dx'}{d(ct')} = \frac{\cosh(\psi_r) dx - \sinh(\psi_r) d(ct)}{\cosh(\psi_r) d(ct) - \sinh(\psi_r) dx} = \frac{ds(\cosh(\psi_r) \sinh(\psi) - \sinh(\psi_r) \cosh(\psi))}{ds(\cosh(\psi_r) \cosh(\psi) - \sinh(\psi_r) \sinh(\psi))}$$

c'est à dire :

$$\tanh(\psi') = \frac{\sinh(\psi - \psi_r)}{\cosh(\psi - \psi_r)} = \tanh(\psi' - \psi_r)$$

Finalement, nous trouvons une formulation plus simple que la composition des vitesses : l'**additivité des rapidités**, qui se traduit par une “relation de Chasles” :

$$\psi_{M/\mathcal{R}'} = \psi_{M/\mathcal{R}} - \psi_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \psi_{M/\mathcal{R}} + \psi_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \quad (3.3)$$

Cette relation, en reprenant l'analogie avec les rotations dans le plan euclidien (Fig.2.3), correspond à l'additivité des angles : si le repère est tourné de ϕ_r , l'angle d'un segment avec Ox (dont la tangente vaut dy/dx) est diminué de ϕ_r , ce qui donne la loi de “transformation des pentes” bien connue (?) :

$$\frac{dy'}{dx'} = \tan(\phi - \phi_r) = \frac{\tan(\phi) - \tan(\phi_r)}{1 + \tan(\phi) \tan(\phi_r)} = \frac{\frac{dy}{dx} - \tan(\phi_r)}{1 + \frac{dy}{dx} \tan(\phi_r)}$$

Comme d'habitude, les formules de trigonométrie circulaire et hyperbolique sont les mêmes à quelques changements de signe près.

Accélération

On peut partir de la définition $a' = dv'/dt'$ avec l'expression de v' trouvée en 3.1, et de l'expression $dt' = \gamma_r(dt - \beta_r dx/c) = \gamma_r(1 - \beta_r \beta) dt$, pour écrire :

$$a' = \frac{d}{dt} \left(\frac{v - v_r}{1 - \frac{v_r v}{c^2}} \right) \frac{dt}{dt'}$$

ce qui donne après quelques calculs :

$$a' = \frac{a}{\gamma_r^3 (1 - \beta_r \beta)^3} \quad (3.4)$$

On peut aussi utiliser les fonctions hyperboliques et la relation $\psi' = \psi - \psi_r$, en remarquant que :

$$\frac{d\psi}{dt} = \cosh^2(\psi) \frac{d\beta}{dt} \quad ; \quad \frac{d\psi'}{dt'} = \cosh^2(\psi') \frac{d\beta'}{dt'}$$

et d'autre part :

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\cosh(\psi)}{\cosh(\psi')}$$

pour écrire :

$$\frac{d\beta'}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\cosh^2(\psi')} = \left(\frac{\cosh(\psi)}{\cosh(\psi')} \right)^3 \frac{d\beta}{dt}$$

ce qui équivaut à 3.4.

Un cas particulier est celui de la transformation de l'accélération “propre” (mesurée dans le référentiel où le point a une vitesse instantanée nulle) ; avec $v = 0$, $a = a_0$ on obtient $a' = a_0/\gamma_r^3 = a_0/\gamma^3$.

3.1.3 Cas général

Nous considérons maintenant des mouvements ayant une direction quelconque (et variable) par rapport au mouvement relatif des référentiels. En notant v_{\parallel} la composante *longitudinale* (parallèle au mouvement relatif \vec{v}_r) et \vec{v}_{\perp} la composante *transversale* (perpendiculaire à \vec{v}_r), et β_{\parallel} et $\vec{\beta}_{\perp}$ les rapports à c correspondants, nous obtenons à partir de 2.6 les relations :

$$\beta'_{\parallel} = \frac{\beta_{\parallel} - \beta_r}{1 - \beta_r \beta_{\parallel}} \quad (3.5)$$

$$\vec{\beta}'_{\perp} = \frac{\vec{\beta}_{\perp} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta_r \beta_{\parallel}} \quad (3.6)$$

On aurait pu obtenir le même résultat en utilisant la transformation du 4-vecteur $\vec{u}/c = (\gamma, \gamma\vec{\beta})$:

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma_r (\gamma - \beta_r \gamma \beta_{\parallel}) \\ \gamma' \beta'_{\parallel} &= \gamma_r (\gamma \beta_{\parallel} - \beta_r \gamma) \\ \gamma' \vec{\beta}'_{\text{perp}} &= \gamma \vec{\beta}_{\text{perp}} \end{aligned}$$

En divisant terme à terme les deux dernières relations γ' par la première, on obtient les formules précédentes.

La transformation des accélérations est plus fastidieuse, mais sans difficulté particulière ; elle s'écrit :

$$a'_{\parallel} = \Lambda^3 a_{\parallel} \quad (3.7)$$

$$\vec{a}'_{\perp} = \Lambda^2 (\vec{a}_{\perp} + \Lambda a_{\parallel} \gamma_r \beta_r \vec{\beta}_{\perp}) \quad (3.8)$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture :

$$\Lambda = \frac{1}{\gamma_r (1 - \beta_r \beta_{\parallel})}$$

On voit que, non seulement les composantes se transforment différemment (comme pour la vitesse), mais qu'une composante transverse peut apparaître dans \mathcal{R}' sans qu'il y en ait dans \mathcal{R} .

Les formules se simplifient si on part de l'accélération propre :

$$\begin{aligned} a'_{\parallel} &= \frac{a_{0\parallel}}{\gamma_r^3} \\ \vec{a}'_{\perp} &= \frac{\vec{a}_{0\perp}}{\gamma_r^2} \end{aligned}$$

3.2 Application à la propagation d'ondes électromagnétiques

3.2.1 Interprétation de l'entraînement partiel de l'éther

Nous pouvons appliquer la composition des vitesses à la propagation de la lumière dans un milieu d'indice $n < 1$, animé d'une vitesse v par rapport à \mathcal{R} : dans le référentiel de ce milieu, la vitesse est c/n ; dans \mathcal{R} , elle est donc égale à :

$$v' = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}}$$

Au premier ordre en v/c , cette expression devient

$$v' = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{nv}{c} - \frac{v}{nc} \right) = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (3.9)$$

On retrouve ainsi la composition classique de la vitesse $\frac{c}{n}$ avec une vitesse d'entraînement $v(1 - \frac{1}{n^2})$, c'est à dire la formule de Fresnel. L'expérience de Fizeau est donc bien expliquée par la Relativité !

3.2.2 Effet Doppler relativiste

Soit un observateur O dans un référentiel \mathcal{R} (dans lequel on raisonne), qui reçoit des signaux d'un émetteur E animé d'une vitesse \vec{v} par rapport à lui. Un signal émis par E à l'instant t_e arrive en O à l'instant t_r :

$$t_r = t_e + \frac{OE}{c} \tag{3.10}$$

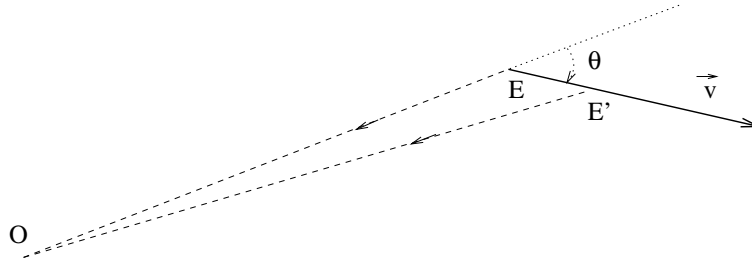


FIG. 3.1 – Principe du calcul de l'effet Doppler

Nous voulons écrire l'intervalle élémentaire du temps de réception en fonction de celui du temps d'émission, compte tenu de ce que la position de E à l'émission est fonction de t_e , avec

$$d(\overrightarrow{OE}) = \vec{v} dt_e \quad \rightarrow \quad d(OE) = v \cos \theta dt_e$$

Nous obtenons donc :

$$dt_r = dt_e + \frac{d(OE)}{c} = (1 + \beta \cos \theta) dt_e$$

Jusque là, notre calcul n'a pas fait intervenir la Relativité. Nous devons maintenant nous ramener à l'intervalle de *temps propre* pour E : $d\tau_e = \sqrt{1 - \beta^2} dt_e$, ce qui donne :

$$dt_r = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} d\tau_e$$

c'est à dire pour les fréquences d'émission ν_e et de réception ν_r :

$$\nu_r = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta} \nu_e \tag{3.11}$$

formule qui ne diffère de l'effet classique que par le facteur de Lorentz, qui vaut 1 au premier ordre en β .

3.2.3 Aberration angulaire relativiste

Considérons maintenant un observateur animé d'une vitesse \vec{v} suivant l'axe Ox , qui reçoit un signal de vitesse c venant d'une direction faisant un angle θ avec Ox ; nous voulons calculer l'angle apparent

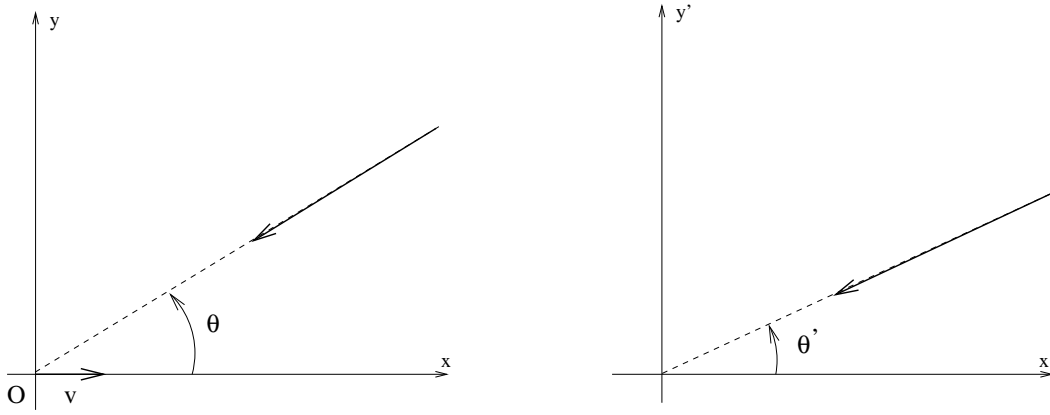


FIG. 3.2 – Principe du calcul de l'aberration angulaire

de réception, c'est à dire la direction, par rapport à Ox , de la vitesse du signal dans le référentiel de l'observateur.

Dans le référentiel "fixe", les composantes de la vitesse du signal sont :

$$\begin{aligned} V_x &= -c \cos \theta \\ V_y &= -c \sin \theta \end{aligned}$$

Dans le référentiel de l'observateur, elles seront donc :

$$\begin{aligned} V'_x &= \frac{-c \cos \theta - v}{1 + \frac{v c \cos \theta}{c^2}} = -c \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta} \\ V'_y &= \frac{-c \sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v c \cos \theta}{c^2}} = -c \frac{\sin \theta}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)} \end{aligned}$$

On vérifie que $(V'_x)^2 + (V'_y)^2 = c^2$ (invariance de la vitesse de la lumière); l'angle θ' mesuré par l'observateur peut être défini par :

$$\cot \theta' = \frac{V'_x}{V'_y} = \gamma \left(\cot \theta + \frac{\beta}{\sin \theta} \right) \quad (3.12)$$

A nouveau, on retrouve la formule classique, à un facteur de Lorentz près.

3.2.4 Utilisation des quadrivecteurs

Une onde plane de vitesse c peut être écrite sous la forme suivante :

$$F(t, x, y, z) = K \cos(\Phi(t, x)) \quad \text{avec} \quad \Phi(t, x) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (3.13)$$

où \vec{k} est le *vecteur d'ondes* (colinéaire à la direction de propagation) et $\omega = 2\pi\nu$ est la *pulsation*; ils vérifient $\omega = kc$.

Les deux problèmes précédents peuvent donc se ramener aux lois de transformation de \vec{k} et ω . Nous partirons du fait que la *phase* $\Phi(t, x)$ est un *invariant*; si nous introduisons l'objet à 4 composantes $\vec{k} = (\omega/c, \vec{k})$, nous voyons que $\Phi = \vec{k} \cdot \vec{x}$, donc que \vec{k} est un 4-vecteur. Dans une transformation de Lorentz

suivant Ox , on aura donc, dans un plan Oxy :

$$\begin{aligned}\frac{\omega'}{c} &= \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \beta k_x \right) \\ k'_x &= \gamma \left(k_x - \beta \frac{\omega}{c} \right) \\ k'_y &= k_y\end{aligned}$$

Avec $k_x = -k \cos \theta$, $k_y = -k \sin \theta$ et $\omega = kc$, on trouve donc :

$$\begin{aligned}\omega' &= \gamma \omega (1 + \beta \cos \theta) \\ k' \cos \theta' &= \gamma k (\cos \theta + \beta) \\ k' \sin \theta' &= k \sin \theta\end{aligned}$$

La première équation est équivalente à 3.11 (ici le référentiel final est celui de l'observateur); le quotient terme à terme des deux autres redonne 3.12.

Chapitre 4

La Dynamique Relativiste

Il s'agit d'abord de donner une nouvelle formulation à la Relation Fondamentale de la Dynamique : ce sera réalisé grâce à la notion de quadrivecteur énergie-impulsion, qui obéit à des lois de conservation. Nous verrons ensuite des applications aux systèmes de particules, notamment l'utilisation judicieuse d'invariants.

4.1 La masse et le quadrivecteur énergie-impulsion

4.1.1 Définitions

Historiquement, Einstein et d'autres ont cherché à trouver une nouvelle expression pour la quantité de mouvement (supposée colinéaire à la vitesse) et l'énergie, de telle façon que les lois de conservation dans une collision entre particules soient bien invariantes (indépendantes de l'observateur), pour toutes les configurations possibles. Nous prendrons ici un raccourci pour aller directement au "bon" résultat.

Nous postulerons d'abord que la *masse* est une propriété intrinsèque d'un objet :

La **masse** d'un objet est un **invariant**

Nous définirons ensuite un 4-vecteur proportionnel à la 4-vitesse, dont la partie spatiale redonne la quantité de mouvement classique $m\vec{v}$ à faible vitesse ; en fait, on prendra un 4-vecteur ayant la dimension d'une énergie en posant :

Quadrivecteur **énergie-impulsion** :

$$\tilde{p} = mc \tilde{u} = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{mc\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

(cette dénomination sera justifiée par la suite ; nous utiliserons couramment "impulsion" pour "quantité de mouvement").

Notons que par *définition*, on a :

$$\frac{\vec{p}}{p^0} = \vec{\beta} \quad \text{et} \quad \tilde{p} \cdot \tilde{p} = (mc^2)^2 \quad (4.1)$$

(\tilde{p} , comme \tilde{u} , est du genre temps).

La Relation Fondamentale s'écrit, sous forme invariante :

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \vec{F} \quad (4.2)$$

où \vec{F} est la *quadri-force* (dont l'expression reste à établir...). Cette équation donne pour la partie "spatiale", une relation analogue à la RFD classique :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma \vec{F} \quad (4.3)$$

et pour la partie "temporelle" :

$$\frac{dp^0}{dt} = \gamma F^0 \quad (4.4)$$

une relation apparemment nouvelle, que nous pouvons interpréter en remarquant que $\vec{p} \cdot \vec{p}$ est constant, ce qui donne :

$$\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \implies p^0 \frac{dp^0}{dt} = \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \implies \frac{dp^0}{dt} = \vec{p} \cdot \vec{F} \quad (4.5)$$

(un facteur c peut apparaître ou non à cause de l'ambiguïté sur la notation \vec{p} : quantité de mouvement classique ou partie spatiale de \vec{p} , avec un facteur c implicite).

Ceci permet d'interpréter p^0 comme l'expression relativiste de l'énergie \mathcal{E} (sa variation est le *travail* de la force) ; il y a toutefois une grande différence : l'énergie **au repos** n'est pas nulle, elle vaut :

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 \quad (4.6)$$

Plus généralement

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.7)$$

et on obtient la relation relativiste entre énergie et quantité de mouvement :

$$\mathcal{E}^2 - (c\vec{p})^2 = (mc^2)^2 \quad (4.8)$$

On peut bien sûr définir une énergie cinétique comme l'excès par rapport à l'énergie au repos :

$$\mathcal{E}_{cin} = \sqrt{(c\vec{p})^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \quad (4.9)$$

4.1.2 Approximations faiblement relativiste et ultra-relativiste

La limite faiblement relativiste est celle où $v \ll c$, ce qui équivaut à l'une quelconque des relations :

$$p \ll mc \quad ; \quad p \ll \mathcal{E} \quad ; \quad \mathcal{E} \simeq mc^2$$

Au premier ordre en β^2 on retrouve pour l'énergie cinétique l'expression classique $\vec{p}^2/2m$.

La limite ultrarelativiste est celle où $v \simeq c$, ou encore :

$$p \gg mc \quad ; \quad \mathcal{E} \gg mc^2 \quad ; \quad pc \simeq \mathcal{E}$$

Elle est valide dans beaucoup de cas pour les particules sortant d'un accélérateur, et permet une simplification de beaucoup de calculs. Pour une particule de masse nulle (c'est le cas du photon), on a même toujours exactement :

$$\mathcal{E} = pc$$

4.1.3 Convention de notation “ $c = 1$ ”

Pour alléger l’écriture, on utilise couramment un choix d’unités cohérent pour \mathcal{E} , p et m , pour lequel on a numériquement $c = 1$, et on l’omet systématiquement ; par exemple, on exprime les énergies en eV , les quantités de mouvement en eV/c , les masses en eV/c^2 . On écrit alors :

$$\frac{p}{\mathcal{E}} = \beta \quad ; \quad \frac{\mathcal{E}}{m} = \gamma \quad ; \quad \mathcal{E}^2 + p^2 = m^2$$

(sous-entendu : p veut dire pc , et m veut dire mc^2).

4.2 Systèmes de particules, centre de masse et masse équivalente

En Mécanique Classique, le *centre de masse* d’un système de particules est le *barycentre* de leurs masses. Si on veut obtenir l’équivalent en Mécanique Relativiste, il faut modifier cette définition pour que la *vitesse* de ce point se comporte bien comme une vitesse dans une transformation de Lorentz. C’est le cas si on prend les énergies pour poids dans le barycentre :

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i \mathcal{E}_i \vec{r}_i}{\sum_i \mathcal{E}_i} \quad (4.10)$$

Sa vitesse est alors :

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i \mathcal{E}_i \vec{v}_i}{\sum_i \mathcal{E}_i} = \frac{c^2 \sum_i \vec{p}_i}{\sum_i \mathcal{E}_i} = c^2 \frac{\vec{p}_{tot}}{\mathcal{E}_{tot}} \quad (4.11)$$

c’est à dire que \vec{v}_{cm} peut être définie comme la vitesse associée au 4-vecteur $\vec{p}_{tot} = (\mathcal{E}_{tot}, c\vec{p}_{tot})$ (vitesse d’un point matériel ayant la somme des énergies et quantités de mouvement du système). Comme la somme de 4-vecteurs du genre temps est aussi du genre temps¹ on a toujours $v_{cm} < c$, sauf pour un système de particules de masse nulle, de vitesses colinéaires et de même sens.

Une autre définition possible est la suivante : le *référentiel du centre de masse* est celui où $\vec{p}_{tot} = \vec{0}$ (en pratique on ne s’intéressera qu’à ce référentiel, pas à la position exacte du centre de masse). Dans la suite nous désignerons par *c.m.* ce référentiel, s’il n’y a pas d’ambiguïté sur le système. Nous noterons les quantités exprimées dans le *c.m.* avec une astérisque.

La *masse équivalente* est la masse qu’aurait le point fictif évoqué ci-dessus, d’énergie-impulsion $(\mathcal{E}_{tot}, c\vec{p}_{tot})$, c’est à dire :

$$m_{eq}c^2 = \sqrt{\mathcal{E}_{tot}^2 - (c\vec{p}_{tot})^2} \quad (4.12)$$

Il est clair que c’est un *invariant*.

4.3 Interactions entre particules

4.3.1 Lois de conservation

Dans toutes les théories envisagées, l’énergie et la quantité de mouvement d’un système isolé sont *conservées*, en particulier au cours d’une interaction entre particules, supposée assez brève pour qu’on puisse négliger l’interaction avec le reste de l’Univers. Ceci n’impose pas que la somme des *masses* des constituants soit conservée, et de fait, on observe des réactions (dites *inélastiques*) où les particules finales et initiales² ne sont pas de même nature, et où de la masse se transforme en énergie cinétique ou inversement.

¹Attention ! les 4-vecteurs du genre espace n’ont pas cette propriété...

²Remarquons que dans tout référentiel, la séparation entre “initial” et “final” est la même (les demi-cônes du futur et du passé sont globalement invariants) : la réaction est qualitativement la même.

Cependant la conservation des quatre composantes de l'énergie-impulsion interdit des formes de conversion "naïves". Par exemple, un proton n'a pas une masse suffisante pour se désintégrer en un neutron (plus d'autres particules). Même si on l'accélère de façon que son énergie totale dépasse la valeur requise, il ne le pourra pas plus, car il faudrait que ses produits de désintégration emportent son impulsion, donc une énergie cinétique. Plus simplement, on peut voir que si la désintégration est impossible dans un référentiel, elle l'est dans tous ; or elle l'est dans le référentiel propre !

4.3.2 Interaction sur cible fixe et collisionneur

On s'intéresse à une réaction du type :

$$a + b \rightarrow c + d + \dots$$

Si a est un "projectile" (masse m_a , impulsion p_a , énergie E_a , énergie cinétique T_a) et b une "cible" fixe (masse m_b), le système $a + b$ a pour masse équivalente l'énergie totale dans le *c.m.* E_{tot}^* :

$$E_{tot}^{*2} = (E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 = (E_a + m_b)^2 - p_a^2 = m_a^2 + 2m_b E_a + m_b^2 = (m_a + m_b)^2 + 2m_b T_a$$

(on a utilisé le fait que $E_a^2 - p_a^2 = m_a^2$)

En particulier, pour que la réaction soit possible, il faut que E_{tot}^* soit au moins égal à la somme des masses des particules finales, ce qui définit le *seuil* de réaction :

$$(T_a)_{min} = \frac{\sum m_{finales} - (m_a + m_b)^2}{2m_b} = (-Q) \frac{m_a + m_b + \sum m_{finales}}{2m_b}$$

où on a introduit un bilan énergétique (par analogie avec les réactions chimiques) :

$$Q = \sum m_{initiales} - \sum m_{finales}$$

Si $Q > 0$, la réaction est dite *exoénergétique* : il n'y a pas de seuil, et une partie de la masse initiale est convertie en énergie cinétique ; si $Q < 0$, la réaction est *endoénergétique* : une partie de l'énergie cinétique initiale est convertie en masse.

Si l'approximation faiblement relativiste est applicable à toutes les particules, on a nécessairement $m_a + m_b = \sum m_{initiales} \simeq \sum m_{finales}$, et on trouve :

$$\frac{m_b}{m_a + m_b} (T_a) \geq (-Q)$$

(le terme de gauche est le résultat du calcul classique de l'énergie cinétique dans le centre de masse de $a + b$).

Si l'énergie du projectile est grande par rapport aux masses initiales, on voit que :

$$E_{tot}^* \simeq \sqrt{2m_b E_a}$$

c'est à dire que l'énergie disponible dans le *c.m.* n'augmente que comme la racine carrée de l'énergie du projectile. Pour atteindre de grandes valeurs de E_{tot}^* , il est alors avantageux d'accélérer a et b , c'est à dire d'utiliser un *collisionneur* ; si on peut faire en sorte que $\vec{p}_a = -\vec{p}_b$, on a $E_{tot}^* = E_a + E_b$ (toute l'énergie de a et b est disponible pour créer de la masse).

L'inconvénient est qu'il est impossible d'obtenir des faisceaux de particules accélérées ayant la densité de la matière ordinaire (celle qui fournit les cibles fixes), ce qui réduit la probabilité d'interactions ; dans les accélérateurs modernes, on remédie à ce problème en installant des systèmes de focalisation sophistiqués au point d'intersection des faisceaux, et éventuellement en les faisant se croiser un grand nombre de fois (collisionneurs circulaires).

4.3.3 Réactions “à deux corps”

Ce sont des réactions du type

$$a + b \rightarrow c + d$$

La probabilité (reliée à la *section efficace*) d'une telle réaction dépend de la configuration relative de a, b, c, d . Cette configuration (à une rotation et un changement de référentiel près, qui ne doivent rien changer) est complètement décrite, compte tenu de la conservation de E_{tot} et \vec{p}_{tot} , par deux paramètres cinématiques libres (plus, le cas échéant, les paramètres décrivant l'état interne des particules, comme leurs spins). Si on se place dans le *c.m.*, où $\vec{p}_a^* = -\vec{p}_b^*$ et $\vec{p}_c^* = -\vec{p}_d^*$, on peut choisir d'une part E_{tot}^* (ou, de façon équivalente, la valeur de p_i^* commune à a et b , ou de p_f^* commune à c et d) et d'autre part l'angle θ^* de diffusion (par convention, l'angle entre \vec{p}_a^* et \vec{p}_c^* , qui est le même qu'entre \vec{p}_b^* et \vec{p}_d^*).

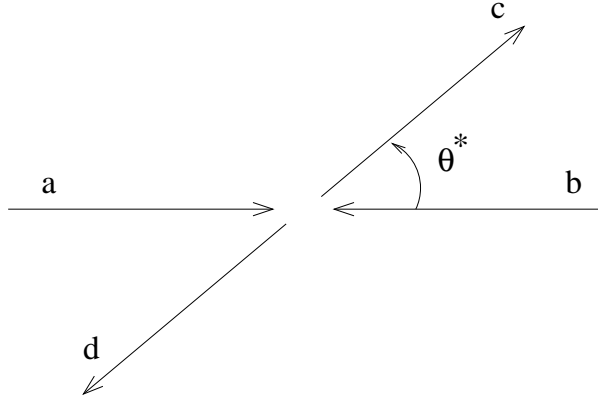


FIG. 4.1 – Configuration d'une réaction à deux corps dans le référentiel du centre de masse

On peut aussi choisir deux des trois *invariants de Mandelstam* :

$$s = (\tilde{p}_a + \tilde{p}_b)^2 = (\tilde{p}_a + \tilde{p}_b)^2 = (E_{tot}^*)^2 \quad (4.13)$$

$$t = (\tilde{p}_a - \tilde{p}_c)^2 = (\tilde{p}_b - \tilde{p}_d)^2 \quad (4.14)$$

$$u = (\tilde{p}_a - \tilde{p}_d)^2 = (\tilde{p}_b - \tilde{p}_c)^2 \quad (4.15)$$

qui sont en fait liés par la relation :

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \quad (4.16)$$

La variable s est évidemment toujours positive, alors que t et u sont en général négatives. On appelle parfois t variable de *transfert*, car c'est l'invariant correspondant à la 4-impulsion d'un objet q qui serait un intermédiaire “échangé”, la réaction se décomposant en :

$$a \rightarrow c + q \quad , \quad b + q \rightarrow d$$

Malgré le caractère “irréel” de cet objet ($t < 0$), ce mécanisme est sous-jacent à beaucoup d'interactions dans la théorie quantique relativiste. La variable u (transfert “croisé”) joue le même rôle si on permute c et d . L'intérêt de ces variables est d'être exprimables dans n'importe quel référentiel.

Dans le cas où $m_a = m_c$ et $m_b = m_d$ (réaction élastique), et aussi à la limite ultrarelativiste dans le cas général, on aura :

$$E_a^* = E_c^* \quad ; \quad E_b^* = E_d^* \quad ; \quad p_i^* = p_f^* = p^* \quad (4.17)$$

$$t = -(\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 = -4p^* \sin^2 \frac{\theta^*}{2} \quad (4.18)$$

De même si $m_a = m_d$ et $m_b = m_c$, ou dans le cas ultrarelativiste :

$$u = -(\vec{p}_a - \vec{p}_d)^2 = -4p^* \cos^2 \frac{\theta^*}{2} \quad (4.19)$$

Chapitre 5

L'électromagnétisme relativiste

Le grand succès de la Relativité a été de réconcilier l'électromagnétisme avec la relativité galiléenne ; nous prendrons ici un raccourci pour montrer comment les équations de Maxwell peuvent être réécrites telles quelles dans l'espace-temps de Minkowski. Pour cela, il faut considérer l'ensemble des composantes des champs électrique et magnétique comme composantes d'un objet unique, de caractère tensoriel dans cet espace ; cette complication mathématique est largement compensée par une grande simplification dans ce nouveau cadre, et par le fait que l'électromagnétisme servira de modèle pour la construction des théories des interactions fondamentales (non abordées ici).

5.1 Le formalisme tensoriel (version minimale)

Nous appellerons *quadritenseur d'ordre 2* dans l'espace de Minkowski, un objet mathématique ayant 16 composantes (doublement indicées de 0 à 3), se transformant dans un changement de référentiel comme les produits des composantes de deux 4-vecteurs \tilde{x} et \tilde{y} (l'ensemble des $x^\mu y^\mu$) :

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma} \quad (5.1)$$

Naturellement, nous pourrions abaisser un ou deux indices avec la règle habituelle : $T_0^0 = T^0_0 = T_{00} = T^{00}$; $T_i^0 = -T^0_i = -T_{0i} = -T^{0i}$ (mêmes égalités en échangeant les indices) ; $T_i^j = T_i^j = -T_{ij} = -T^{ij}$. La formule 5.1 pourra s'écrire avec toutes les positions possibles des indices, respectant la cohérence entre les deux termes, et la position différente pour les indices de sommation implicite.

Plus généralement, un 4-tenseur *d'ordre n* aura des composantes à n indices, avec la loi de transformation :

$$T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1} \Lambda^{\mu_2}{}_{\rho_2} \cdots \Lambda^{\mu_n}{}_{\rho_n} T^{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n} \quad (5.2)$$

et toutes les variantes possibles sur la position des indices (on parle d'un tenseur p fois contravariant et q fois covariant s'il y a p indices en haut et q en bas). Un 4-tenseur d'ordre 1 est un 4-vecteur ; un 4-tenseur d'ordre 0 est un scalaire.

La propriété la plus intéressante est la possibilité de *contracter* une paire d'indices (sommation interne) pour passer d'un tenseur d'ordre n à un tenseur d'ordre $n - 2$:

Si les $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ sont les composantes d'un tenseur d'ordre n , les $T^{\mu_1\mu_2\cdots\rho\cdots\mu_n}$ sont les composantes d'un tenseur d'ordre $n - 2$

Par exemple $T^\mu{}_\mu$ (la *trace* du tenseur T) est un invariant. On le vérifie à partir de la définition et de la propriété caractéristique des matrices de Lorentz (2.19) :

$$T'^\mu{}_\mu = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\mu{}^\sigma T^\rho{}_\sigma = \delta_\rho^\sigma T^\rho{}_\sigma = T^\rho{}_\rho \quad (5.3)$$

La démonstration s'étend sans problème au cas général, et avec des positions quelconques des indices.

Signalons encore qu'on peut définir des tenseurs d'ordre 2 *symétriques* ($T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$) ou *antisymétriques* ($T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$), et que cette propriété est *invariante*. Pour les tenseurs d'ordre quelconque, on peut définir une (anti)symétrie par rapport à un sous-ensemble d'indices.

5.2 Le retour des équations de Maxwell

5.2.1 Le quadrivecteur densité de courant

Nous allons tout d'abord *postuler* (ce sera vérifié *a posteriori* par la validité des lois de l'électromagnétisme) que :

La charge électrique d'un objet est un invariant.

Si nous considérons donc un volume V_0 contenant une charge totale Q au repos (densité $\rho_0 = Q/V_0$), cette même charge sera attribuée dans un autre référentiel (où cette charge est animée d'une vitesse \vec{v}) à un volume V_0/γ : la densité y sera donc $\rho' = \rho_0 \gamma$ avec une densité de courant $\vec{j}' = \rho' \vec{v} = \rho_0 \gamma \vec{v}$. On voit ainsi qu'à partir de la quadrivitesse $(\gamma c, \gamma \vec{v})$ on peut construire un nouveau quadrivecteur : la quadri-densité de courant :

$$\tilde{j} = \rho_0 (\gamma c, \gamma \vec{v}) = (\rho c, \vec{j}) \quad (5.4)$$

Cette notion peut s'étendre à une distribution quelconque de charges des deux signes, en mouvement.

Notons en passant que l'équation qui exprime la *conservation de la charge* :

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

s'écrit tout simplement en notation quadrivectorielle :

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{j} = \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (5.5)$$

L'invariance de cette relation exprime que si la conservation de la charge est vérifiée dans un référentiel, elle l'est dans tous.

5.2.2 Le quadripotentiel et les champs

Le quadripotentiel

Dans la théorie classique, les champs dérivent de potentiels (scalaire pour le champ électrique, vecteur pour le champ magnétique) ; une charge Q à l'origine, animée d'une vitesse \vec{v} constante, engendre des champs qui peuvent être dérivés de :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (\text{potentiel scalaire})$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{v}}{r} \quad (\text{potentiel vecteur})$$

On peut obtenir une version relativiste en fabriquant un 4-vecteur \tilde{A} , qui, dans le *référentiel propre* de la charge, a pour expression $(\Phi, \vec{0})$, Φ ayant l'expression ci-dessus. Dans un autre, on obtiendra, en se souvenant que $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$, et en utilisant la 4-vitesse $\tilde{u} = (\gamma c, \gamma \vec{v})$ de la charge :

$$A^0 = \frac{\Phi}{c} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q u^0}{r'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q u^0}{r'} \quad (5.6)$$

$$\vec{A} = \gamma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{v}}{r'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{u}}{r'} \quad (5.7)$$

la distance r' étant mesurée dans le référentiel de la charge, donc, en choisissant l'axe x dans la direction du mouvement :

$$r'^2 = (\gamma(x - vt))^2 + y^2 + z^2$$

Au premier ordre en v/c , on retrouve bien les expressions classiques du potentiel et du potentiel-vecteur créés par une charge à la position $(vt, 0, 0)$.

Soient r la distance et θ l'angle polaire du point d'observation par rapport à la position instantanée de la charge ; si on pose :

$$r^* = r'/\gamma = \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} = r\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} \quad (5.8)$$

on obtient l'expression suivante pour le 4-potential

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^*} ; \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{v}}{r^*} \quad (5.9)$$

Les champs et leur transformation

Nous admettrons que dans tous les cas, quelle que soit l'origine des champs, ils peuvent être décrits à partir d'un champ de 4-vecteurs \vec{A} . Explicitons la "dérivation" des champs à partir des potentiels, en termes de dérivées spatio-temporelles, avec les conventions adoptées :

$$\frac{\vec{E}}{c} = -\frac{1}{c} \left(\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) = \begin{pmatrix} \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 \\ \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 \\ \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \\ \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 \\ \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Les composantes de \vec{E}/c et \vec{B} apparaissent ainsi comme les composantes non nulles d'un *tenseur antisymétrique* d'ordre 2, le *tenseur électromagnétique* :

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ E^i &= F^{i0} \quad (i = 1, 2, 3) \\ B^i &= F^{jk} \quad (i, j, k \text{ permutation paire de } 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Pour les transformations d'espace, \vec{E} se comporte bien comme un vecteur, et \vec{B} comme un pseudo-vecteur. Pour un changement de référentiel, nous devons écrire la loi de transformation d'un tenseur 5.1 pour obtenir celles des champs :

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} ; \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times (c\vec{B}_{\perp})) \quad (5.13)$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel} ; \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times (\vec{E}_{\perp}/c)) \quad (5.14)$$

Comme on s'y attendait, les composantes de \vec{E} et \vec{B} se mélangent (en fait, seulement les composantes transverses). Il existe deux combinaisons qui sont invariantes : $(E/c)^2 - B^2$ et $\vec{E} \cdot \vec{B}$; on peut le vérifier à partir des formules de transformation. On peut aussi les déduire d'expressions tensorielles : la première n'est autre que l'"auto-contraction" $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$; la seconde est équivalente à $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$, où $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur d'ordre 4 *complètement antisymétrique*, tel que $\epsilon^{0123} = 1$ (tous les autres composantes non nulles valent alors 1 ou -1 , suivant la parité de la permutation μ, ν, ρ, σ).

Si nous reprenons l'exemple de la charge en mouvement uniforme, nous avons dans son référentiel propre (avec $\kappa = Q/4\pi\epsilon_0$)

$$\vec{E}' = \kappa \frac{\vec{r}'}{r'^3}$$

ce qui nous donne en appliquant 5.13, avec la notation définie en 5.8 :

$$E_x = E'_x = \kappa \frac{x'}{r'^3} = \kappa \frac{x - vt}{\gamma^2 r^{*3}} \quad (5.15)$$

$$E_y = \gamma E'_y = \kappa \gamma \frac{y'}{r'^3} = \kappa \frac{y}{\gamma^2 r^{*3}} \quad (5.16)$$

(même expression pour la composante z)

On voit donc que le champ est *radial* par rapport à la position instantanée de la charge, mais avec une intensité anisotrope : pour une distance donnée, elle est minimale sur l'axe Ox ($\kappa/\gamma^2 r^3$), maximale dans le plan transverse ($\kappa \gamma/r^3$).

Le champ magnétique est simplement exprimé par :

$$c\vec{B} = \vec{\beta} \times \vec{E}$$

Il s'annule sur l'axe Ox ; les lignes de champ sont des cercles d'axe Ox .

Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell prennent une forme particulièrement simple dans ce formalisme. Deux d'entre elles résultent de la définition par dérivation ; l'identité :

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} \equiv 0 \quad (5.17)$$

pour tout triplet d'indices distincts (λ, μ, ν) , donne :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.18)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.19)$$

En présence de charges, il suffit d'écrire :

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = \mu_0 j^\nu \quad (5.20)$$

pour obtenir les deux autres équations :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.21)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.22)$$

5.2.3 La quadriforce électromagnétique

Par construction, si \tilde{u} est la 4-vitesse d'une particule de charge q , l'expression $F^{\mu\nu} u_\nu$ donne les composantes d'un 4-vecteur. On vérifie que l'équation :

$$m \frac{du^\mu}{ds} = q F^{\mu\nu} u_\nu \quad (5.23)$$

est bien compatible avec la force de Lorentz telle quelle :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= q \vec{E} \cdot \vec{v} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

(la première équation exprime le travail de cette force, qui ne fait intervenir que la partie électrique du champ).

5.2.4 L'invariance de jauge

Comme dans la théorie classique, les potentiels ne sont pas définis de façon unique par les champs (qui sont les seuls à être observables). On voit en particulier que si f est un champ scalaire quelconque, l'expression $\partial^\mu(\partial^\nu f) - \partial^\nu(\partial^\mu f)$ s'annule identiquement, donc on peut ajouter au 4-potential \tilde{A} un 4-gradient quelconque sans changer les champs. Réciproquement, si $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \equiv 0$, \tilde{A} est un 4-gradient.

L'opération :

$$A^\mu \leftarrow A^\mu + \partial^\mu \Psi \quad (5.24)$$

est appelée *changement de jauge*, et le fait que les champs électromagnétiques ne varient pas dans cette opération s'appelle *invariance de jauge*¹.

On peut toujours trouver une fonction Ψ telle que la 4-divergence $\partial^\mu A_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ soit nulle : c'est la *jauge de Lorentz*. Le 4-potential associé à une charge (5.6) vérifie cette condition (c'est évident dans le référentiel propre de la charge).

5.2.5 L'équation de D'Alembert et les potentiels retardés

L'équation 5.20 peut encore s'écrire :

$$\partial_\mu(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) - \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu$$

Si on a choisi la jauge de Lorentz, on obtient simplement

$$\square \tilde{A} = \mu_0 \tilde{j} \quad (5.25)$$

(équation de d'Alembert avec second membre).

Dans le vide, on obtient une *équation d'ondes* :

$$\square \tilde{A} = \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta \right) \tilde{A} = 0 \quad (5.26)$$

dont on sait que les solutions (états "libres" du champ électromagnétique) peuvent être considérées comme des superpositions d'*ondes planes* de la forme :

$$\tilde{A} = \tilde{A}_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}))$$

avec $\omega = ck$, c'est à dire $\vec{k} \cdot \vec{k} = 0$. A chacune de ces ondes planes correspond un couple (\vec{E}, \vec{B}) orthogonaux à \vec{k} et entre eux.

S'il existe des charges et des courants, qu'on peut décrire par un champ de 4-courant $\tilde{j}(\vec{x})$, la linéarité de l'équation de D'Alembert permet de passer par les solutions "élémentaires" (le second membre est restreint à un élément d'espace-temps $d\vec{x} = d\vec{x} dt$ autour de l'origine²). En dehors de cet élément, l'équation homogène admet comme solution générale, en coordonnées sphériques :

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1(ct - r) + \tilde{A}_2(ct + r)$$

où \tilde{A}_1 et \tilde{A}_2 sont des fonctions arbitraires d'une variable. Le premier terme apparaît comme quelque chose qui se propage *à partir de l'origine*, tandis que le second se propage *vers l'origine*. Par ailleurs nous voulons retrouver, pour une charge fixe à l'origine, le potentiel de Coulomb classique. On peut obtenir ce résultat de la manière suivante :

- On se place dans le référentiel propre de l'élément de charge, pour se ramener à une charge immobile

¹Cette propriété a des conséquences très importantes quand on passe à la théorie quantique

²ceci ne correspond pas à une situation physique, où la charge doit être conservée ; ce n'est qu'un *intermédiaire de calcul*

dq , existant pendant un temps dt , sans élément de courant.

- On choisit la solution *particulière* dite “retardée” :

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \eta(t - r/c) \quad ; \quad d\vec{A} = \vec{0}$$

la fonction η valant 1 sur un intervalle dt autour de 0, et 0 ailleurs. Cette solution est une sorte de coquille sphérique de potentiel se propageant à partir de la charge, à partir de l’instant où elle a existé.

- Dans un référentiel quelconque, on doit d’abord écrire pour un élément à l’origine :

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} d\vec{x}}{r} \eta(t - r/c)$$

(la “coquille” se propage à la vitesse c dans tout référentiel ...)

- Si on se place maintenant en un point P donné de position \vec{x}_0 à un instant donné t_0 , on doit sommer sur les contributions de tous les éléments d’espace-temps de position (t, \vec{x}) telles que $t = t_0 - r/c$ (r étant la distance de cet élément au point P).

On obtient ainsi l’expression générale des *potentiels retardés*

$$\vec{A}(t_0, \vec{x}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint d\vec{x} \frac{\vec{j}(t_0 - \|\vec{x} - \vec{x}_0\|/c, \vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} \quad (5.27)$$

On peut se demander si on n’a pas introduit par cette procédure une irréversibilité fondamentale des lois physiques; en fait la dissymétrie passé-futur n’existe que dans notre point de vue : si on avait choisi n’importe quelle autre solution particulière, la différence entre elle et celle des potentiels retardés aurait été solution de l’équation homogène, donc une solution de “champ libre”, qui peut se décomposer en superposition d’ondes planes. Rien n’interdit la présence d’ondes “libres” dans l’Univers, et notre point de vue consiste à ignorer tout ce qui ne “vient” pas des charges : quelque chose qui convergerait vers une charge serait perçu comme artificiel, tout en étant physiquement possible.

5.3 Le rayonnement des charges en mouvement

5.3.1 Les potentiels de Liénard-Wiechert

Nous allons appliquer les potentiels retardés au cas d’une charge unique. Remarquons d’abord que nous pouvons parler de *la* position de cette charge contribuant au potentiel retardé en un point donné de l’espace (comme sa vitesse est inférieure à c , toute “coquille” rétrograde partant de P la rencontre une fois et une seule). Pour un temps donné t de “réception” du potentiel en \vec{x} , on peut donc définir l’évènement “émission” $t_e(t, \vec{x})$, $\vec{x}_e(t, \vec{x})$ sur la trajectoire d’espace-temps de la charge.

On pourrait alors penser, de façon simpliste, à supprimer l’intégration dans 5.27; cependant, pour éviter la singularité d’une charge ponctuelle, nous devons l’imaginer comme un petit élément de volume contenant la charge Q ; mais alors, si la charge se déplace, les différentes parties de ce volume ne contribuent pas à l’intégrale au même instant, donc le point P voit ce volume comme *distordu* (cf la “distorsion photographique” étudiée en TD). Pour contourner la difficulté, on peut se placer dans le référentiel \mathcal{R}_e où la charge est immobile à l’instant t_e , puis exploiter les propriétés des 4-vecteurs pour revenir au référentiel d’origine. Pour simplifier les notations, on pose $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}_e$ et $R = \|\vec{R}\|$, dans le référentiel courant (la signification pourra donc varier d’une formule à l’autre). On écrit donc dans \mathcal{R}_e

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad ; \quad \vec{A} = \vec{0}$$

puis en remarquant que dans \mathcal{R}_e , on a $R = c(t - t_e) = \tilde{u}_e \cdot (\tilde{x} - \tilde{x}_e)/c$ (en notant \tilde{u}_e la 4-vitesse de la charge au temps t_e), on peut regrouper Φ et \vec{A} dans une expression ne faisant appel qu’à des 4-vecteurs,

donc applicables dans tout référentiel :

$$\tilde{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\tilde{u}_e}{\tilde{u}_e \cdot (\vec{x} - \vec{x}_e)}$$

On trouve ainsi dans les potentiels dits de Liénard-Wiechert :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R - \vec{v}_e \cdot \vec{R}/c} \quad (5.28)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q \vec{v}_e}{R - \vec{v}_e \cdot \vec{R}/c} \quad (5.29)$$

5.3.2 Champ électromagnétique d'une charge en mouvement

A partir du potentiel de Liénard-Wiechert (5.28), on peut obtenir le champ électromagnétique avec les formules 5.10. Leur application comporte une difficulté technique, car le vecteur $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}_e$ est fonction de \vec{x} et t directement (position et temps d'observation) et aussi indirectement à travers la position $\vec{x}_e(t_e)$ de la charge à un instant t_e qui définit *implicitement* comme fonction de \vec{x} et t par la relation :

$$t = t_e + \frac{\|\vec{x} - \vec{x}_e(t_e)\|}{c} \quad (5.30)$$

La première étape du calcul consiste à obtenir les dérivées de cette fonction implicite, en différenciant cette relation ; par exemple, à \vec{x} fixé, pour une variation dt :

$$dt = dt_e + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_e} \|\vec{x} - \vec{x}_e(t_e)\| dt_e = dt + \frac{1}{c} \vec{v}_e \cdot \vec{R} dt_e \quad (5.31)$$

ce qui donne, en introduisant le vecteur unitaire $\vec{U} = \vec{R}/R$ et $\vec{\beta}_e = \vec{v}_e/c$:

$$\frac{\partial t_e}{\partial t} = \frac{1}{1 - \vec{\beta}_e \cdot \vec{U}} \quad (5.32)$$

De même, pour un déplacement $d\vec{x}$ à t fixé :

$$0 = dt_e + \frac{\vec{v}_e \cdot \vec{u}}{c} dt_e + \frac{1}{c} \vec{U} \cdot d\vec{x} \quad (5.33)$$

qui donne :

$$\vec{\nabla} t_e = -\frac{1}{c} \frac{\vec{U}}{1 - \vec{\beta}_e \cdot \vec{U}} \quad (5.34)$$

Ensuite, il faut calculer les dérivées de fonctions "composites", du type

$$G(t, \vec{x}) = F(t, \vec{x}, t_e(t, \vec{x}), \vec{x}_e(t, \vec{x}))$$

On obtient, en remarquant que $\partial \vec{x}_e / \partial t_e = \vec{v}_e$, et en regroupant dans $\vec{\nabla}_e$ les dérivées par rapport aux composantes de \vec{x}_e :

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial F}{\partial \xi} + \left(\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}_e F + \frac{\partial F}{\partial t_e} \right) \frac{\partial t_e}{\partial \xi}$$

où ξ est l'une quelconque des coordonnées d'espace-temps.

Finalement, on obtient pour les champs, en posant $\kappa = Q/4\pi\epsilon_0$:

$$\vec{E} = \frac{\kappa}{R^2} \frac{(\vec{U} - \vec{\beta}_e)}{\gamma^2(1 - \vec{\beta}_e \cdot \vec{U})^3} + \frac{\kappa}{R} \frac{\vec{U} \times ((\vec{U} - \vec{\beta}_e) \times \vec{a})}{(1 - \vec{\beta}_e \cdot \vec{U})^3} \quad (5.35)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{\beta}_e \times \vec{E} \quad (5.36)$$

On peut vérifier que le premier terme (en $1/R^2$) n'est autre que celui qui serait créé par une charge en *mouvement uniforme* (5.15), tandis que le deuxième (en $1/R$) est lié à l'*accélération* de la charge à l'instant t_e : c'est un terme de *rayonnement*, qui est prédominant à grande distance, et qui donne un vecteur de Poynting en $1/R^2$ (flux d'énergie conservatif).

Index

- éther, 5, 6
 - entraînement partiel, 5, 6, 22
- aberration angulaire, 23
- causalité, 14
- centre de masse, 28
- champ électromagnétique, 33
 - charge accélérée, 37
 - charge en mouvement uniforme, 33
 - transformation, 33
- charge
 - conservation, 32
 - invariance, 32
- cône de lumière, 12
- contraction des longueurs, 8, 16
- D'Alembert (équation), 35
- dilatation des temps, 11, 15
- Doppler (effet)q, 23
- Fizeau (expérience de), 6
- Michelson et Morley (expérience de), 7
- faiblement relativiste, 27
- genre, 14
- intervalle, 12
- jauge
 - de Lorentz, 35
 - invariance de jauge, 35
- Langevin (paradoxe des jumeaux), 16
- longueur propre, 12
- Lorentz
 - force, 8
 - groupe, 13
 - transformation spéciale, 12
 - transformation, 12, 18
- Mandelstam (invariants de), 30
- masse équivalente, 28
- Maxwell
 - équations, 34
 - équations, 8
- Poincaré
 - groupe, 13
- potentiel
 - de Liénard-Wiechert, 36
 - retardé, 36
- quadrivecteur, 17, 24
 - énergie-impulsion, 26
 - densité de courant, 32
 - force électromagnétique, 34
 - potentiel, 32
- réaction
 - à deux corps, 30
 - seuil, 29
- rapidité, 13, 21
- rayonnement, 36
- relativité galiléenne, 5
- hyperbolique (représentation), 13
- temps propre, 11
- tenseur, 31
 - électromagnétique, 33
 - contraction, 31
 - trace, 31
- transformation des accélérations, 20, 21
- transformation des vitesses, 20
- ultra-relativiste, 27